Feuille d'exercices VI.

Intégrales à paramètres

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit leurs transformées de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}dt, \quad \hat{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\mu(t)$$

Montrer que $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x)+g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur de $f(x)+g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 3. On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2}F(x) = 0$

   En déduire que la fonction $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ est constante.
4. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le résultat de l'exercice 2.3
5. En déduire la transformée de Fourier d'une variable gaussienne standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{itx}dt.$$

Exercice 4. On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.

Exercice 5. Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,dt$.

Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\varphi''(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

Théorèmes de Fubini et mesures produits

Exercice 6. Soit $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable positive et μ une mesure σ-finie sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$. Montrer que pour $p \in]0, \infty[$:

$$\int f^p d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) > t\})dt.$$

Exercice 7. $\star$ Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < \infty$, $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable et $\Phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que Φ' est intégrable. Montrer que

1. la fonction $\Phi \circ f$ est intégrable ;
2. $\int_\Omega (\Phi \circ f)(\omega) d\mu(\omega) = \int_{[0,\infty[} \Phi'(t)\mu(\{\omega : f(\omega) > t\}) d\lambda(t) + \Phi(0) \cdot \mu(\Omega)$.

Exercice 8. On considère le domaine compact $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\displaystyle\iint_\Delta xy dx\, dy$.

Exercice 9. Calculer $\displaystyle\iint_D (x + y)e^{-(x+y)} dxdy$, où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 11. Soient ν la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$ et $\rho = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ la *mesure de Rademacher*. Soit $s(x, y) = x + y$ donnant une fonction $s : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Montrer que la mesure image par s de la mesure produit est $s_*(\nu \otimes \rho) = \nu$.

Exercice 12. Soit $D = [0, 1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{(x + y + 1)^2}$ et $\displaystyle\iint_D \frac{dx\, dy}{(x + y)^2}$.

Exercice 13. Soient f, g des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $||f||_1 = \int_\mathbb{R} |f(x)| d\lambda(x)$. On définit la convolution de f, g par :

$$f * g(x) = \int_\mathbb{R} f(x - y)g(y) d\lambda(y) \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que $f * g$ est, mesurable et que $||f * g||_1 = ||f||_1||g||_1$.
2. Montrer que la définition de $f * g$ s'étend pour presque tout x aux $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$, que $f * g \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.
3. Montrer que pour f, g, h toutes mesurables positives ou toutes intégrables, alors $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Changements de variables

Exercice 14. Soit $D = B((0, 1), 1)$ dans le plan. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Exercice 15. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} dxdy$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 16. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 17. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2-2x < 0, x^2-2y < 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.
(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 18. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 19. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 20. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.
Justifier que l'intégrale $\displaystyle\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.