Feuille d'exercices VII.

Changement de variables

Exercice 1. Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Exercice 2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 3. Soient $0 < a < b, 0 < c < d$, et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax^2 < y < bx^2, c < xy < d\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.
(Indication : poser $x = u^2 v$ et $y = uv^2$)

Exercice 5. On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. Justifier que l'intégrale $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$, où $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 7. Calculer l'intégrale $\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 8. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.
Justifier que l'intégrale $\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 9. Soit $\psi : U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

1. Représenter graphiquement le point $p = \psi(r,\theta,\varphi)$ pour un triplet (r,θ,φ) fixé. On appelle (r,θ,φ) les coordonnées sphériques du point p.
2. Déterminer $\psi(U)$.
3. Montrer que ψ est injective.
4. Calculer $J_\psi(r,\theta,\varphi)$ pour tout $(r,\theta,\varphi) \in U$ et en déduire que ψ est un C^1-difféomorphisme de U sur $\psi(U)$.
5. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume d'une boule de rayon R.
6. Soient 3 réels a, b et c strictement positifs. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Exercice 10. À l'aide du changement de variables $x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uw}, z = \sqrt{uv}$, calculer le volume des domaines suivants :

— $D_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0 \text{ et } uv, uw, vw < 1\}$,
— $D_2 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0 \text{ et } uv+uw+vw < 1\}$.