Feuille d'exercices VII.

Intégrales à paramètres

Rappels :

Théorème de continuité avec hypothèse de domination. Soit $f\colon A \times \Omega \to \mathbb{K}$. On suppose

1. Pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$, est mesurable sur Ω.
2. Pour presque tout $t \in \Omega$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in A$.
3. (Hypothèse de domination) Il existe une fonction intégrable $g\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$, $g \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\forall t \in \Omega$, $\forall x \in A$, $|f(x,t)| \le g(t)$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_\Omega f(x,t)\, d\mu(t)$ est continue en x_0.

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit leurs transformées de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}\, dt, \qquad \hat{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\mu(t)$$

Montrer que $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Correction 1. Le résultat suit du Théorème de continuité avec hypothèse de domination.

1. Une fonction à valeurs complexes est mesurable si sa partie réelle et sa partie imaginaire son séparément mesurables. Comme $t \mapsto e^{itx}$ est pour x fixé une fonction continue, elle est mesurable et le produit avec f qui est mesurable préserve cette propriété.
2. La fonction $x \mapsto f(t)e^{itx}$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé (car $f(t)$ est une constante).
3. Finalement pour la domination, il suffit de prendre $g(t) = |f(t)|$ qui est intégrable et qui satisfait pour tout $x, t \in \mathbb{R}$; $|f(t)\, e^{itx}| = g(t)$.

Nous obtenons que $\hat{f}$ est continue.

Pour $\hat{\mu}$, la vérification que $(x,t) \mapsto e^{itx}$ satisfait (1), (2) est analogue parce ces deux propriétés dépendent seulement de l'espace mesurable mais pas du choix de mesure. Pour point (3), utilise que $g\colon t \mapsto 1$ domine $f(x,t) = e^{itx}$. La fonction g est mesurable étant l'indicatrice de l'espace entier et comme $\int g(t), d\mu(t) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$ car μ est une mesure finie, g est aussi intégrable. Alors $\hat{\mu}$ est continue.

Rappels :

Théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination. Soit $f\colon U\times\Omega\to\mathbb{K}$ avec $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert. On suppose

1. (Existence de F) Pour tout $x\in U$, $t\mapsto f(x,t)$, est intégrable sur Ω.
2. (dérivabilité) Il existe N avec $\mu(N^c)=0$, tel que pour tout $t\in N$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur U.
3. (Hypothèse de domination) Pour tout compact $K\subset U$, il existe une fonction intégrable $g_K\in L^1(\Omega)$ telle que

$$\forall t\in N,\quad \forall x\in K,\quad \left|\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right|\le g_K(t)\ .$$

Alors la fonction $x\mapsto F(x)=\int_\Omega f(x,t)\,d\mu(t)$ admet une i-ème dérivée partielle sur U, $\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,d\mu(t)\ .$$

Remarque : Dans le théorème précèdent, si $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ est continue, alors $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ le sera aussi. Détails ? Question : Pourquoi est $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ intégrable ?

Exercice 2. Soient $f(x)=(\int_0^x e^{-t^2}\,dt)^2$ et $g(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont C^1 et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x)+g'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, en déduire la valeur de $f(x)+g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Correction 2.

1. Pour la fonction f, on se sert du fait que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident sur les fonctions Riemann intégrables. En appliquant le Théorème fondamental de l'analyse (pour les fonctions Riemann intégrables) nous voyons que $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=e^{-x^2}$. Alors $f'(x)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

   La fonction $g_0(x,t)=\frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$ est définie et lisse pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Le point (2) du *Théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination* est donc automatiquement satisfait. Étant une fonction continue, il est clair que $t\mapsto g_0(x,t)$ est mesurable et comme $\exp(-x^2(1+t^2))\le 1$, g_0 est dominée par la fonction intégrable $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$, nous voyons donc que $t\mapsto g_0(x,t)$ est aussi intégrable, ce qui vérifie le point (1) du théorème.
   La dérivé de g_0 par rapport à x est la fonction continue $\frac{\partial g_0}{\partial x}(x,t)=-2x\,\exp(-x^2(1+t^2))$. Soit $C>0$, alors g_0 est dominée pour tout x dans l'intervalle compact $[-C,C]$ et pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$ par la fonction intégrable $t\mapsto 2C$.
   Nous obtenons que $g(x)$ est dérivable et

$$g'(x)=\int_0^1 -2x\,\exp(-x^2(1+t^2))\,dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\ .$$

Comme expliqué dans la remarque du *Théorème de continuité avec hypothèse de domination*, comme $\partial g_0/\partial_x$ est continue, nous voyons que $g(x)$ est même C^1.

2. Pour simplifier $g'(x)$, remplace $u = xt$, alors
$$\int_0^1 \exp(-x^2t^2)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\,du\ .$$
On obtient donc que $g'(x) = -f'(x)$. La fonction $f(x)+g(x)$ est C^1 et à dérivé nulle, alors c'est la fonction constante et nous avons $f(x)+g(x) = f(0)+g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$.
3. Nous pouvons utiliser l'estimation
$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \le e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
pour voir que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ceci montre que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi/4$ et $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 3. On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(tx)\,dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2}F(x) = 0$

   En déduire que la fonction $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ est constante.
4. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le résultat de l'exercice VII.3
5. En déduire la transformée de Fourier d'une variable gaussienne standard
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{itx}\,dt\ .$$

Correction 3.

1. $F(x)$ est bien définie, car $t \mapsto e^{-t^2}\cos(tx)$ est mesurable étant une fonction continue (en t pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixe) et elle est intégrable car elle est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-t^2}$.
2. Pour appliquer le *Théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination*, nous avons déjà vérifié (1) ; pour (2), remarque que $(x,t) \mapsto e^{-t^2}\cos(tx)$ est lisse sur tout $\mathbb{R}^2$ et en particulier elle est C^1 en x pour tout t fixé.
Pour l'hypothèse (3), la dérivé $\frac{\partial}{\partial x}e^{-t^2}\cos(tx) = -t\,e^{-t^2}\sin(tx)$ est dominée par $t \mapsto t\,e^{-t^2}$. En particulier, la domination ne dépend pas de x. La fonction $t \mapsto t\,e^{-t^2}$ est intégrable avec $\int_0^\infty t\,e^{-t^2}\,dt = -1/2\,e^{-t^2}|_0^\infty = 1/2$. Nous obtenons que F est C^1 et F' est donnée par l'expression
$$F'(x) = -\int_0^\infty t\,e^{-t^2}\sin(tx)\,dt\ .$$
3. Nous obtenons
$$\begin{aligned}\frac{x}{2}F(x) + F'(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(x\cos(tx) - 2t\sin(tx)\big)\,e^{-t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\big(\sin(tx)\,e^{-t^2}\big)\,dt = \frac{1}{2}\ \big(\sin(tx)\,e^{-t^2}\big)\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0\ .\end{aligned}$$

Pose $G(x) = \exp \frac{x^2}{4}\, F(x)$ avec F une fonction C^1 qui satisfait l'équation $F' + \frac{x}{2}\, F = 0$. On vérifie facilement que $G'(x) = \big(F'(x) + \frac{x}{2}\, F(x)\big)\, \exp \frac{x^2}{4} = 0$, c'est-à-dire, $G(x)$ est constante.

4. Comme $e^{x^2/4}\, F(x) = G(x) = G(0) = F(0)$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$, nous voyons que $F(x) = e^{-x^2/4}\, F(0)$ et

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

selon Exo VII.3. Donc $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x^2/4}$.

5. La variable gaussienne standard est (je suppose en cherchant sur wikipedia ?) la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{1}{2}\, t^2\big)$. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable a été introduite en Exo VII.1 :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{itx}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \cos(tx)\, dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(tx)\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, \sin(tx)\, dt\ . \end{aligned}$$

La fonction $e^{-t^2/2}\, \cos(tx)$ est paire en t, c'est-à-dire, elle est invariante invariant par le changement $t \mapsto -t$, mais par contre, la fonction $e^{-t^2/2}\, \sin(tx)$ est impaire en t. Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt &= \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt \end{aligned}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, \sin(tx)\, dt = 0\ .$$

Alors $\hat{f}(x)$ se simplifie à

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\, \cos(tx)\, dt\ .$$

Avec la substitution $u = t/\sqrt{2}$, nous trouvons

$$\hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, \cos(\sqrt{2}\, xu)\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, F(\sqrt{2}\, x) = e^{-x^2/2}\ .$$

Exercice 4. On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\, \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.

Correction 4. 1. La fonction $f(x,t) := \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$. En particulier $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable pour tout choix fixe de $x \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto f(x,t)$ est continue pour tout $t \in]0,\infty[$ fixé.

Pour montrer que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable si $x > 0$, il suffit de montrer que $|f(x,t)|$ est majorée par une fonction g intégrable. Le facteur $|\sin t|/t$ est borné par 1 car $|(\sin t)'| = |\cos t| \leq 1$, alors $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$.

On peut donc majorer $|f(x,t)|$ par $g(x,t) = e^{-tx}$. Pour chaque $x > 0$ fixé, la fonction est intégrable car

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, dt = -\frac{1}{x}\ e^{-tx}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = +\frac{1}{x}\ .$$

Par contre, pour $x = 0$, a fonction n'est pas (Lebesgue) intégrable et l'exo semble être faux, car $f(0,t) = \frac{\sin(t)}{t}$ peut être minorer sur chaque intervalle $[\pi k, \pi\,(k+1)]$ avec $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_{\pi k}^{\pi\,(k+1)} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq \frac{1}{\pi\,(k+1)} \int_{\pi k}^{\pi\,(k+1)} |\sin t|\, dt = \frac{2}{\pi\,(k+1)}$$

et alors

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{\pi k}^{\pi\,(k+1)} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq \sum_{k=0}^\infty \frac{2}{\pi\,(k+1)} = \infty\ .$$

On va donc seulement montrer que $F(x)$ est continue sur $]0,\infty[$. Le problème avec la fonction $g(x,t)$ choisie ci-dessus est qu'elle dépend de x, mais l'hypothèse pour le *Théorème de continuité avec hypothèse de domination* demande que g soit uniforme. La fonction g est monotone en x, $g(x,t) \geq g(x',t)$ pour tout $x \leq x'$, mais malheureusement $g(0,t)$ qui domine tous les $t \mapsto f(x,t)$ n'est pas intégrable.

La solution consiste à utiliser que la continuité est une propriété locale. Pour montrer que $F(x)$ est continue sur $]C,\infty[$ avec $C > 0$, nous pouvons utiliser la domination de toute $t \mapsto f(x,t)$ avec $x > C$ par la fonction $g(t) = e^{-Ct}$. De cette façon, on démontre que $F(x)$ est continue sur chacun des intervalles $]C,\infty[$ avec $C > 0$, donc aussi sur $]0,\infty[$ entier.

2. Pour montrer que $F(x)$ est C^1 sur $]0,\infty[$, regardons la dérivé partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = -t\frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx} = -\sin(t)\, e^{-tx}$. Elle est continue et pour chaque intervalle $]C,\infty[$ avec $C > 0$, cette dérivé est dominée par la fonction intégrable $g(t) = e^{-Ct}$.

Théorèmes de Fubini et mesures produits

Rappels :

Théorème de Fubini–Tonelli. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable. Alors

1. $y \mapsto f(x, y)$ est une fonction mesurable (sur $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ dans $[0, +\infty]$) pour tout $x \in \Omega_1$, et $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$ est une fonction mesurable (sur $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$).
2. $x \mapsto f(x, y)$ est une fonction mesurable (sur $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ dans $[0, +\infty]$) pour tout $y \in \Omega_2$, et $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)$ est une fonction mesurable (sur $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$).
3. On a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y) &= \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)\big)\big)\, d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)\big)\, d\mu_2(y)\ .\end{aligned}$$

Théorème de Fubini. Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

1. $y \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable (sur Ω_2) pour presque tout $x \in \Omega_1$, et $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$ est une fonction intégrable (sur Ω_1).
2. $x \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable (sur Ω_1) pour presque tout $y \in \Omega_2$, et $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)$ est une fonction intégrable (sur Ω_2).
3. On a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y)\, d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y) &= \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)\big)\, d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} f(x, y)\, d\mu_1(x)\big)\, d\mu_2(y)\ .\end{aligned}$$

Exercice 7. On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + x$. Calculer $\displaystyle\iint_{\Delta} xy\, dxdy$.

Correction 7. Nous avons par définition

$$\iint_{\Delta} xy\, dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, \mathbf{1}_{\Delta}(x, y)\, dxdy\,;$$

où $xy\, \mathbf{1}_{\Delta}(x, y)$ est mesurable car Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, nous pouvons réécrire l'application $x \mapsto \mathbf{1}_{\Delta}(x, y)$ comme

$$x \mapsto \begin{cases} \mathbf{1}_{\{x : y-1 \le x \le 2-y\}}(x) & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } y < 0 \text{ ou si } y > 1. \end{cases}$$

Nous aimerions appliquer le théorème de Fubini, mais il faut d'abord s'assurer que $(x,y) \mapsto xy\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)$ soit intégrable, mais vu que la partie positive et négative de la fonction est bornée par $\mathbf{1}_\Delta(x,y)$, ce n'est pas difficile.
Nous obtenons donc avec ce théorème

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} xy\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} xy\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{[0,1]} \Big(\int_{\mathbb{R}} xy\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_{[0,1]} y\,\Big(\int_{\mathbb{R}} x\,\mathbf{1}_{\{x: y-1 \le x \le 2-y\}}(x)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_{[0,1]} y\,\Big(\int_{y-1}^{2-y} x\,dx\Big)\,dy = \int_{[0,1]} y\,\Big(\frac{1}{2}\,x^2\Big)\Big|_{x=y-1}^{x=2-y}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\,\big((2-y)^2 - (y-1)^2\big)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 3y - 2y^2 dy \\
&= \frac{1}{2}\,\Big(\frac{3}{2}\,y^2 - \frac{2}{3}\,y^3\Big)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$