

## Feuille d'exercices VII.

### Ensembles et fonctions convexes

**Exercice 1.** Montrer que les ensembles  $C_i$  suivants sont convexes et trouver les cônes tangents  $T_{C_i}(0)$  en  $0 = (0, 0)$  :

1.  $C_1 = [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , 2.  $C_2 = [0, +\infty[^2$ , 3.  $C_3 = [-1, 1]^2$ , 4.  $C_4 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$ .

**Exercice 2.** 1. Soient  $A, B$  deux convexes. Montrer que  $A \cap B$  est convexe.

Est-ce que  $A \cup B$  est convexe ?

2. Soit  $A = \{0\} \cup ]0, +\infty[^2$ . Montrer que  $A$  est convexe dans  $\mathbb{R}^2$  et calculer  $T_A(0)$ .

3. Soit  $B = ]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ , calculer  $T_B(0)$  et  $T_{A \cap B}(0)$ .

4. Soient  $A, B$  deux convexes généraux avec  $c \in A \cap B$ , trouver une relation entre  $T_{A \cap B}(c)$  et  $T_A(c) \cap T_B(c)$ .

**Exercice 3.** Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

2.  $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$ .

3.  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ .

4.  $\forall x > -1, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ .

**Exercice 4.** Montrer que la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.** Soit  $f$  la fonction définie par la formule  $f(x) = x^{2k}$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que  $f$  est strictement convexe sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .

2. Montrer que  $f$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.** Soient  $E, F$  des e.v. sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soient  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $f$  est convexe et  $g$  est convexe et croissante. Montrer que  $g \circ f$  est convexe.

2. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et  $A : F \rightarrow E$  linéaire, montrer que  $f \circ A$  est convexe.

3. Montrer que  $f(x, y) = (|2x + 3y| + |x - y|)^p$  est convexe sur  $\mathbb{R}^2$  pour  $p \in [1, +\infty[$ .

**Exercice 7.** 1. Prouver que la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = xy$  n'est pas convexe sur  $\mathbb{R}^2$ , mais que les fonctions  $g, h$  définies par  $g(x, y) = x^2 + y^2$  et  $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy$  le sont.

2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en  $x$  (pour chaque  $y$ ) et en  $y$  (pour chaque  $x$ ).

$$i(x, y) = \exp(x + y), j(x, y) = \exp(xy), k(x, y) = \exp(x) + \exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 8.** Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur  $[-1, 1]^2$  :

$$h_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, h_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{12}, h_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{3}, h_4(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

**Exercice 9.** Soit  $f(x, y, z) = (2x + y)^2 + (2x + z)^2 - x^2$ .

1. Montrer que les restrictions de  $f$  aux sous-espaces :

$$C_1 = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, C_2 = \{(x, 0, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}, C_3 = \{(0, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est-ce que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 10.** On s'intéresse au problème de minimiser la fonction  $f$  définie par :

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2]$ .

1. Montrer que  $A$  est convexe.
2. Prouver que  $f$  est convexe sur  $A$ .
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi  $A$  est compact).
4. Trouver la solution.

**Exercice 11.** On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

1. Prouver que  $f$  est strictement convexe sur  $A$ .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

**Exercice 12.** On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = e^{2(x^2 - y) - \cos(x^2 - y)}$$

sur le convexe  $A := [0, +\infty[^2$ .

1. Montrer que  $g(x) = e^{2x - \cos(x)}$  définit une fonction strictement convexe et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. Prouver que  $f$  est strictement convexe et continue sur  $A$ .
3. En utilisant le critère différentiel de minimisation d'une fonction convexe, montrer qu'il n'existe pas de solution au problème de minimisation.
4. Retrouver ce résultat en calculant l'infimum de  $f$  sur  $A$  et montrant qu'il n'est pas atteint.

**Exercices plus difficiles**

**Exercice 13.** Soit  $C$  un convexe et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, montrer que  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si pour tout intervalle  $[a, b] \subset C$ , la restriction  $f|_{[a,b]}$  est convexe.

**Exercice 14.** 1. Soit  $C$  une partie fermée dans  $E$  e.v.n. telle que si  $x, y \in C$  alors  $\frac{x+y}{2} \in C$ . Prouver que  $C$  est convexe.

2. Soit  $C$  convexe fermé de  $E$ . Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que  $f$  est convexe.

3. Même question  $C$  est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 13)

**Exercice 15.** 1. Montrer que la fonction  $x \mapsto e^{2x - \cos(x)}$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $\ln(f)$  est convexe alors  $f$  est convexe. Réciproque ?

3. Application : Montrer que  $x \mapsto (1+x)^x$  est convexe sur  $] -1, +\infty[$ .

**Exercice 16.** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $f$  est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que  $f$  est décroissante).

**Exercice 17.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

1. Montrer que si  $f$  est à valeurs négatives alors  $f$  est constante.

2. Montrer que s'il existe  $a, b$  tels que  $f(x) \leq ax + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est une fonction affine.

**Exercice 18.** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction concave. Montrer que pour tout  $x, y \geq 0$  on a  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ .

**Exercice 19.** Soit  $f$  une fonction de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , majorée, de classe  $C^2$ . On suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\forall x \geq 0 \quad f''(x) \geq af(x) \geq 0.$$

1. Montrer que  $f$  est décroissante.

2. Déterminer la limite de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

3. Montrer que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4. Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a  $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$ .

**Exercice 20.** Montrer que pour  $S$  une partie fermé non-vidé de  $E$  e.v.n. alors la fonction distance  $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s \in S} \|x - s\|$  est convexe si et seulement si  $S$  est convexe.

### Exercices d'entraînements

**Exercice 21.** Commençons avec la définition du cône normal qui est le polaire du cône tangent, c'est à dire si  $C \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble convexe et  $a \in C$  alors *le cône normal* du convexe  $C$  au point  $a$  est

$$N_C(a) := \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in T_C(a), \langle v, u \rangle \leq 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in C, \langle v, u - a \rangle \leq 0\},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

Montrer que les ensemble  $C_i$  définis ci-dessous sont convexes et trouver les cônes normaux  $N_{C_i}(a_j)$  :

1.  $C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  en  $a_1 = (0, 0)$  et en  $a_2 = (0, 1)$ .
2.  $C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}$  en  $a_1 = (0, 0)$ , en  $a_3 = (1, 0)$  et en  $a_4 = (1/2, 1/2)$ .

**Exercice 22.** On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

1. Prouver que  $f$  est strictement convexe sur  $A$ .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi  $A$  est compact)
3. Trouver la solution.

**Exercice 23.** Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$f_0(x, y) = x^2 + y^2 + x^4, \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad f_3(x, y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x, y) = xe^y + ye^x, \quad f_5(x, y) = |x + 1| + |y|, \quad f_6(x, y) = (|x + 1| + |y|)^2.$$

**Exercice 24.** Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur  $[0, 1]^2$  :

$$g_1(x, y) = \frac{x^3 + y^5}{6}, \quad g_2(x, y) = \frac{x^4 + y^6}{12}, \quad g_3(x, y) = -\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$$

$$g_4(x, y) = \frac{x^2y^2}{2}, \quad g_5(x, y) = \cos(xy), \quad g_6(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{6}.$$