Feuille d'exercices VII.

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1. Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes tangents $T_{C_i}(\mathbf{0})$ en $\mathbf{0} = (0,0)$:
1. $C_1 = [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0,+\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1,1]^2$, 4. $C_4 = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$.

Correction 1. Une partie C d'un espace vectoriel réel est *convexe* si elle contient tout le segment compris entre deux quelconques de ses points.

Pour simplifier la tâche, nous allons montrer que le produit $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{k_1+k_2}$ de deux parties convexes $A_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ et $A_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$ est convexe : Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points de $A_1 \times A_2$, alors $x_0, x_1 \in A_1$ et $y_0, y_1 \in A_2$. Le segment entre les deux points se paramétrise par

$$s(t) = (1-t)\cdot(x_0, y_0) + t\cdot(x_1, y_1)$$

avec $t \in [0,1]$. On voit que

$$s(t) = \big((1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1,\ (1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1\big)\ ,$$

c'est-à-dire, la première composante de $s(t)$ est le segment entre x_0 et x_1 en $\mathbb{R}^{k_1}$ et la deuxième composante de $s(t)$ est le segment entre y_0 et y_1 en $\mathbb{R}^{k_2}$. Comme A_1 et A_2 sont convexes, on obtient que $(1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1 \in A_1$ et $(1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1 \in A_2$ pour tout $t \in [0,1]$, ou autrement dit, $s(t) \in A_1 \times A_2$. Ceci montre que $A_1 \times A_2$ est convexe.

Pour (1), (2), (3), on sait que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe peu importe qu'il soit ouvert ou fermé, borné ou non-borné. Clairement les parties C_1, C_2 et C_3 sont donc convexes comme produits de parties convexes.
Pour partie (4), suppose que (x_0, y_0) et $(x_1, y_1) \in C_4$, alors $x_0, x_1, y_0, y_1 \in [0,1]$ et $x_0 \leq y_0$ et $x_1 \leq y_1$. Soit $s(t) = \big(s_x(t), s_y(t)\big)$ le segment entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1). Comme $[0,1]\times[0,1]$ est un convexe, il est clair que le segment $s(t)$ reste dans $[0,1]\times[0,1]$ et il faut juste vérifier $s_x(t) \leq s_y(t)$ pour s'assurer que $s(t) \in C_4$. Ici $x_0 \leq y_0$ et $x_1 \leq y_1$ donc $s_x(t) = (1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1 \leq (1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1 = s_y(t)$ et C_4 est convexe.

Rappelons-nous la définition du cône tangent :

> Le *cône tangent* (au sens de l'analyse convexe) du convexe S dans un e.v.n. E au point $x \in S$ est
>
> $$T_S(x) := \overline{\Big\{\frac{u-x}{s}\ :\ u \in S, s > 0\Big\}} = \overline{\mathbb{R}_+^* \cdot (S-x)},$$

Pour le produit de deux ensembles convexes $A_1 \times A_2$, nous allons montrer que

$$T_{A_1\times A_2}(x,y) = T_{A_1}(x) \times T_{A_2}(y)\ . \tag{1}$$

Soit $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big)$, alors il existe un $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x'', y'') \in A_1 \times A_2$ tq $x' = t\,(x'' - x)$ et $y' = t\,(y'' - y)$. Ceci implique que $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)$ et $y' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)$ ou autrement dit $\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big) \subset \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)$.
Pour prouver l'inclusion dans le sens inverse, soit maintenant $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)$ et $y' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)$, alors il existent $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $x'' \in A_1$ et $y'' \in A_2$ tq $x' = t_1\,(x'' - x)$ et $y' = t_2\,(y'' - y)$. Si $t_1 \geq t_2$, on va factoriser t_1, sinon il faudrait factoriser t_2, ce qui ne change pas l'idée principale du calcul

$$\begin{aligned}(x', y') &= t_1\,\big(x'' - x, \tfrac{t_2}{t_1}\,(y'' - y)\big) = t_1\,\big(x'' - x,\ \tfrac{t_2}{t_1}\,(y'' - y) + y - y\big) \\ &= t_1\,\Big(x'' - x,\ \big(\tfrac{t_2}{t_1}\,y'' + \tfrac{t_1 - t_2}{t_1}\,y\big) - y\Big) = t_1\,\big(\tilde{x} - x,\ \tilde{y} - y\big)\ ,\end{aligned}$$

où $\tilde{x} = x''$ et $\tilde{y} = \frac{t_2}{t_1}\,y'' + \frac{t_1 - t_2}{t_1}\,y$. Comme $s = \frac{t_2}{t_1} \in [0,1]$ et $\frac{t_1 - t_2}{t_1} = 1 - s$, nous avons montré que $\tilde{y}$ se trouve sur le segment entre y' et y, donc par la convexité de A_2, $\tilde{y} \in A_2$.
Ceci montre que $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big)$ et avec le résultat précèdent

$$\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big) = \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)\ .$$

Pour obtenir le cône tangent, on prend l'adhérence de deux côté

$$T_{A_1 \times A_2}(x,y) = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)}\ .$$

Pour toutes parties $A \subset \mathbb{R}^{k_1}$ et $B \subset \mathbb{R}^{k_2}$, l'adhérence d'un produit est égale au produit des adhérences, c'est-à-dire

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}\ .$$

Dans une direction, l'inclusion est évidente parce que l'adhérence $\overline{A \times B}$ et le sous-ensemble fermé le plus petit contenant $A \times B$ et le produit $\overline{A} \times \overline{B}$ est fermé et contient bien $A \times B$, donc $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$. Pour l'autre inclusion, nous pouvons utiliser qu'il existe pour tout $x_\infty \in \overline{A}$ et tout $y_\infty \in \overline{B}$ une suite $(x_n) \subset A$ et une suite $(y_n) \subset B$ tq $x_n \to x_\infty$ et $y_n \to y_\infty$. Ceci implique que $(x_n, y_n) \subset A \times B$ est une suite qui converge vers (x_∞, y_∞) et $(x_\infty, y_\infty) \in \overline{A \times B}$.
On obtient donc

$$\begin{aligned}&\overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)} \\ &\qquad = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big)} \times \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)} = T_{A_1}(x) \times T_{A_2}(y)\end{aligned}$$

et nous avons réussi à prouver l'équation (1).

Avec ce résultat on obtient donc

$$T_{C_1}(\mathbf{0}) = [0, \infty[\times\mathbb{R}, \quad T_{C_2}(\mathbf{0}) = [0, +\infty[^2, \quad T_{C_3}(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^2$$

et pour $T_{C_4}(\mathbf{0})$ note que $\mathbb{R}_+^*\,\big(C_4 - \mathbf{0}\big) = \mathbb{R}_+^*\,C_4$ est $\big\{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x \leq y\big\}$. Cet ensemble est fermé, on trouve $T_{C_4}(\mathbf{0}) = \big\{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x \leq y\big\}$.

Exercice 2. 1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe. Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?

2. Soit $A = \{\mathbf{0}\} \cup]0, +\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $T_A(\mathbf{0})$.
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $T_B(\mathbf{0})$ et $T_{A\cap B}(\mathbf{0})$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A\cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$.

Correction 2. 1. Comme A et B sont *convexes*, elles contiennent tout le segment compris entre deux quelconques de leur points.

Si $x, y \in A \cap B$ alors le segment $[x, y] \subset A$ car A est convexe et $[x, y] \subset B$ car B est convexe. Ceci montre que $[x, y] \subset A \cap B$ et $A \cap B$ est convexe.

Par contre, soient $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{1\} \subset \mathbb{R}$, alors $A \cup B = \{0, 1\}$ n'est pas connexe et certainement pas convexe. En générale donc, la réunion de deux convexes n'est pas convexe.

2. Clairement $]0, +\infty[^2$ est convexe comme produit de deux convexes. Pour montrer que A est convexe, il suffit de vérifier que tout segment entre $\mathbf{0}$ et un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est compris dans A.

   Le segment est de la forme $(1-t) \cdot \mathbf{0} + t \cdot (x, y) = t \cdot (x, y) = (tx, ty)$ avec $t \in [0, 1]$. Si $t \neq 0$, alors $(tx, ty) \in]0, +\infty[^2$, si $t = 0$, alors $(tx, ty) = \mathbf{0}$, donc le segment entier est contenu dans A et A est convexe.

   Pour trouver le cône tangent, on vérifie sans problème que

$$\mathbb{R}_+^* \big(A - \mathbf{0}\big) = \mathbb{R}_+^* A = A$$

   et l'adhérence de $\mathbb{R}_+^* \big(A - \mathbf{0}\big)$ est $T_A(\mathbf{0}) = [0, \infty[^2$.

3. En exo 1, nous avons vu que le cône tangent d'un produit de convexes et le produit des cônes tangents correspondants, ici donc $T_B(\mathbf{0}) =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$. L'intersection $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ consiste seulement de l'origine et son cône tangent est $T_{A\cap B}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$.
4. Si $x' = t \cdot (x - c)$ avec $x \in A \cap B$ et $t > 0$, alors $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)$ et $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)$, ce qui implique l'inclusion $\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big) \subset \big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\big) \cap \big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\big)$.

   Pour l'inclusion dans le sens inverse, soit $x' = t_A \cdot (x_A - c)$ et $x' = t_B \cdot (x_B - c)$ avec $x_A \in A$, $x_B \in B$, et $t_A, t_B > 0$. Suppose que $t_B \geq t_A$, alors $x_B = \frac{t_A}{t_B} \cdot (x_A - c) + c = \frac{t_A}{t_B} \cdot x_A + \frac{t_B - t_A}{t_B} \cdot c$. Comme $s = \frac{t_A}{t_B} \in]0, 1]$ et $\frac{t_B - t_A}{t_B} = 1 - s$, on voit que x_B se trouve sur le segment entre x_A et c, c'est-à-dire, $x_B \in A$, donc $x_B \in A \cap B$. Si $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big) \cap \mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)$, alors $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big)$ et nous avons montré

$$\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big) = \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\Big) .$$

   Si l'on prend l'adhérence de deux côtés on trouve

$$T_{A\cap B}(c) = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\Big)} .$$

   Malheureusement (ou non ; selon vos goûts), en générale $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$ comme peut être vérifié par exemple avec $X = \mathbb{Q}$ et $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, car $X \cap Y = \emptyset$, mais

$\overline{X} \cap \overline{Y} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$! À la place, nous avons $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ car $\overline{X \cap Y}$ est le fermé le plus petit contenant $X \cap Y$; le côté droite contient $X \cap Y$ et est fermé. Pour notre question ici, on trouve que

$$
\begin{aligned}
T_{A\cap B}(c) &= \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (A-c)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (B-c)\Big)} \\
&\subset \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (A-c)\Big)} \cap \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (B-c)\Big)} = T_A(\mathbf{0}) \cap T_B(\mathbf{0})
\end{aligned}
$$

et la partie 3 ci-dessus montre que nous ne pouvons pas s'attendre mieux.

Exercice 3. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Correction 3. Par un théorème du cours, une fonction différentiable $f\colon C \to \mathbb{R}$ qui est définie sur un ouvert convexe C d'un e.v.n. E, est convexe ssi pour tout $u, v \in U$:

$$f(u) - f(v) \geq df(v) \cdot (u - v) .$$

Selon un autre résultat du cours, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentiable et définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si f' est croissante (en particulier, si f est deux fois differentiable, f est convexe si $f'' \geq 0$).

1. Comme $\frac{d^2}{dx^2} e^x = e^x > 0$, alors e^x est convexe. Selon le premier résultat, nous avons

   $$e^x - e^{x'} \geq f'(x') \cdot (x - x') = e^{x'} \cdot (x - x') .$$

   Si l'on pose $x' = 0$, nous trouvons l'inégalité désirée.
2. Comme $\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$, alors $f(x) = -\ln x$ est convexe. À nouveau avec le résultat du cours, on trouve

   $$\ln x' - \ln x = f(x) - f(x') \geq f'(x') \cdot (x - x') = -\frac{1}{x'} \cdot (x - x') .$$

   Pose $x' = 1$, alors

   $$-\ln x \geq -x + 1 .$$
3. Comme $\frac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x$, la fonction $f(x) = -\sin x$ est convexe sur l'intervalle $[0, \pi]$. On trouve donc

   $$\sin x' - \sin x = f(x) - f(x') \geq f'(x') \cdot (x - x') = -\cos x' \cdot (x - x') .$$

   Si on évalue en $x' = 0$, on trouve

   $$-\sin x \geq -x .$$

Pour l'autre inégalité, on se sert de la définition de la convexité : toute segment droit entre deux points du graphe de f se trouve au-dessus du graphe, c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in]0,1[$

$$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') \geq f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) \ .$$

En choisissant $x = 0$ et $x' = \pi/2$, on trouve pour tout $\lambda \in]0,1[$

$$\lambda - 1 = \lambda\, f(0) + (1-\lambda)\, f(\pi/2) \geq f\big((1-\lambda)\, \pi/2\big) = -\sin\big((1-\lambda)\, \pi/2\big)$$

ou

$$1 - \lambda \leq \sin\big((1-\lambda)\, \pi/2\big) \ .$$

En remplaçant $(1-\lambda)\, \pi/2$ par la variable x, nous trouvons $\frac{2}{\pi}\, x = 1 - \lambda$ et λ est bien entre $]0,1[$, donc

$$\frac{2}{\pi}\, x \leq \sin x \ .$$

4. La fonction $g(x) = \sqrt{1+x}$ a deuxième dérivé $g''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} < 0$, alors $f(x) = -\sqrt{1+x}$ est convexe. On trouve avec

$$f(x) - f(x') \geq df(x') \cdot (x - x') \ .$$

où en remplace $x' = 0$ pour obtenir

$$-\sqrt{1+x} + 1 = f(x) - f(0) \geq df(0) \cdot x = -\frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot x$$

qui donne l'inégalité cherchée.

Exercice 4. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction 4. Selon le cours, une fonction $g \colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\triangle_a g(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Ici, on reconnaît $\frac{e^x - 1}{x}$ comme la fonction $\triangle_a g(x)$ pour $g(x) = e^x$ et $a = 0$. Comme e^x est convexe, on déduit que f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalement, on sait que e^x est differentiable en $x = 0$, ce qu'implique que $\triangle_0 g(x)$ a une extension continue en $x = 0$, et $\lim_{x \to 0} \triangle_0 g(x) = \frac{d}{dx}\big|_{x=0} \exp x = e^0 = 1$, mais c'est bien la valeur de f en 0 donnée dans l'exo, $f(x)$ est donc une fonction continue.
Clairement, une fonction qui est continue en 0 et croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est croissante sur tout $\mathbb{R}$, car choisie n'importe quel $x > 0$, alors

$$f(x) - f(0) = \big(f(x) - f(\varepsilon)\big) + \big(f(\varepsilon) - f(0)\big) \ .$$

La première parenthèse est toujours positive pour $0 < \varepsilon < x$, donc

$$f(x) - f(0) \geq f(\varepsilon) - f(0) .$$

Comme $|f(\varepsilon) - f(0)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, et comme le côté gauche est indépendant de ε, nous obtenons

$$f(x) - f(0) \geq 0 .$$

Pour $x < 0$, le calcul est analogue. On a donc prouvé que f est croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction 5.

1. $f'(x) = 2k\, x^{2k-1}$ et $f''(x) = 2k\,(2k-1)\, x^{2k-2}$. Si $k = 1$, alors $f''(x) = 2 > 0$ et f est strictement convexe sur tout $\mathbb{R}$, si $k > 1$, alors $f''(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, mais en $x = 0$ la deuxième dérivé s'annule. On trouve donc que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un domaine convexe).
2. Pour vérifier la convexité stricte sur tout $\mathbb{R}$, nous utilisons la définition : Il faut montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x'$, la segment par entre $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(x', f(x')\big)$ se trouve (sauf pour les points initiales et finales) strictement au-dessus du graphe de f, c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in]0, 1[$

$$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) .$$

Si $x' = 0$, on obtient l'inégalité stricte

$$\lambda\, f(x) = \lambda\, x^{2k} > \lambda^{2k}\, x^{2k} = f\big(\lambda\, x\big) ,$$

car $\lambda \in]0, 1[$. Soient $x, x' > 0$, comme f est strictement convexe sur $]0, \infty[$ nous trouvons

$$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) .$$

Clairement $f(x') = f(-x')$, donc

$$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(-x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) = \big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big)^{2k} .$$

Nous finissons la preuve avec $(a-b)^{2k} \leq (a+b)^{2k}$ pour $a, b > 0$ car $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ et car la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $[0, \infty[$.

Exercice 6. Soient E, F des e.v. sur $\mathbb{R}$.

1. Soient $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est convexe et $A\colon F \to E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x, y) = \big(|2x + 3y| + |x - y|\big)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Correction 6.

1. Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in]0,1[$, alors par la convexité de f nous avons
$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big) \leq \lambda\, f(u) + (1-\lambda)\, f(v)\ .$$
Grâce à la monotonicité de g nous pouvons appliquer g des deux côtés
$$g \circ f\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big) \leq g\big(\lambda\, f(u) + (1-\lambda)\, f(v)\big)\ .$$
Maintenant on utilise sur le côté droite que g est convexe pour voir que $g \circ f$ est convexe.
2. La linéarité de A nous permet d'écrire
$$f\big(A\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big)\big) = f\big(\lambda\, Au + (1-\lambda)\, Av\big)$$
et la convexité de f fait que
$$f\big(\lambda\, Au + (1-\lambda)\, Av\big) \leq \lambda\, f(Au) + (1-\lambda)\, f(Av)\ ,$$
donc $f \circ A$ est bien convexe.
3. La fonction f se compose de $g(x,y) = |2x+3y| + |x-y|$ et $u \mapsto u^k$. La deuxième fonction est convexe et croissante sur $[0, \infty[$. Avec la partie 1 de cet exercice, il suffit de montrer que g est convexe. Comme vu dans le cours, la somme de deux fonctions convexes est convexe, if faut donc montrer que $(x,y) \mapsto |2x+3y|$ et $(x,y) \mapsto |x-y|$ sont convexes.
L'application $x \mapsto |x|$ est convexe, car
$$|\lambda x + (1-\lambda)\, x'| \leq \lambda\, |x| + (1-\lambda)\, |x'|$$
par l'inégalité triangulaire. $(x,y) \mapsto 2x+3y$ et $(x,y) \mapsto x-y$ sont des fonctions linéaires et nous finissons en appliquant partie (2) de cet exercice.

Exercice 7.

1. Prouver que la fonction f définie par $f(x,y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x,y) = x^2 + y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.
2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).
$$i(x,y) = \exp(x+y), \quad j(x,y) = \exp(xy), \quad k(x,y) = \exp x + \exp y\ .$$
Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Rappels : La hessienne d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est la matrice

$$Hf(x_1,\dots,x_n) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

de ses dérivés partielles secondes. La matrice est *symétrique* car $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
Une matrice symétrique A est dite *positive* si ${}^t vAv \geq 0$ quelque soit $v \in \mathbb{R}^n$, elle est dite *définie positive* si $\forall v \neq \mathbf{0}$: ${}^t vAv > 0$.
Pour tester si A est définie positive, il existe le

> **Critère de Sylvester :** Pour qu'une matrice $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, réelle symétrique, soit définie positive, il faut et suffit que les n matrices $A_p = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ pour p de 1 à n, aient leur déterminant strictement positif, autrement dit que les n mineurs principaux dominants soient strictement positifs.

Attention : Si $\det A_p \geq 0$ pour tous les p de 1 à n, ce ne suffit pas pour dire que A est positive (exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) par contre nous pouvons déduire un critère facile pour montrer que A *n'est pas* positive :

> Soit $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, une matrice réelle symétrique. Si le déterminant d'une des n matrices $A_p = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ pour p de 1 à n est strictement négative, alors A n'est pas positive.

Preuve : Toute matrice symetrique A admet une base de vecteurs propres $v_1,\dots,v_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Il est facile de se convaincre que A est positive si et seulement si tous les valeurs propres sont positives et définie positive si et seulement si tous les valeurs propres sont strictement positives.
En particulier, si A est positive, nous pouvons legèrement pousser toutes les valeurs propres qui s'annulent vers $]0,\infty[$ pour trouver une matrice symétrique A' définie positive arbitrairement proche de A. Le critère de Sylvester nous dit que les sous-déterminants de A' sont strictement positives et par continuité il faut donc que les déterminants de toutes sous-déterminants A_p de A soit au moins positives.
Exercice : ajouter les détails.

Correction 7. 1. Toutes les fonctions mentionnées sont lisses, nous pouvons donc calculer leur hessiennes.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ ,\quad Hh(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On voit que selon le choix du vecteur (a,b),

$$Hf(x,y)\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big) = 2ab$$

peut être positive (par exemple $(a,b) = (1,1)$) ou négative (par exemple $(a,b) = (1,-1)$). Selon le critère expliqué au cours, f n'est ni convexe ni concave.

Les formes symétriques $Hg(x,y)$ et $Hh(x,y)$ sont définies positives. C'est facile à vérifier avec :

et on déduit que g et h sont strictement convexes.

2. Les fonctions sont lisses, nous obtenons pour leur hessiennes

$$Hi(x,y) = \exp(x+y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad Hj(x,y) = \exp(xy) \cdot \begin{pmatrix} y^2 & 1+xy \\ 1+xy & x^2 \end{pmatrix} \ ,$$
$$Hk(x,y) = \begin{pmatrix} \exp x & 0 \\ 0 & \exp y \end{pmatrix} \ .$$

Avec le critère de Sylvester, nous voyons que Hi et Hk sont positive définies, par contre Hj ne l'est pas car $\det Hj = -\exp(2xy) \cdot (1+2xy)$ qui n'est ni positive ni négative. Ceci implique que i et k sont strictement convexe et j n'est même pas convexe.

Dans tous les trois cas, nous voyons que les fonctions sont séparement convexes en x et en y, car leur dérivés respectives correspondent aux valeurs sur la diagonale de l'héssienne.

Exercice 8. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1,1]^2$:

$$h_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6}, \quad h_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12}, \quad h_3(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{3}, \quad h_4(x,y) = x^4+y^4-4xy \ .$$

Correction 8. Toutes les trois fonctions sont lisses. Calculons donc les hessiennes :

$$Hh_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \ , \qquad Hh_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \ ,$$
$$Hh_3(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad Hh_4(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \ .$$

Clairement Hh_1 n'est ni positive ni négative pour $x<0$ et $y>0$ ou $x>0$ et $y<0$. En particulier, h_1 n'est pas convexe (ni concave).
La matrice Hh_2 est définie positive sur l'ensemble où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Ceci suffit pour dire que pour tel (x,y), ${}^t v \cdot Hh_2(x,y) \cdot v \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Comme Hh_2 est continue, on garde v fix et pousse $x \to 0$ ou $y \to 0$, et on obtient ${}^t v \cdot Hh_2(0,y) \cdot v \geq 0$ et ${}^t v \cdot Hh_2(x,0) \cdot v \geq 0$. Ceci implique que h_2 est convexe.
La matrice Hh_3 est définie positive sur $x > -1/2$, mais h_3 n'est pas convex pour $x < -1/2$. La matrice Hh_4 est seulement définie positive si $9x^2y^2 > 1$, c-à-d, $|x|\,|y| > 1/3$. Ni h_3 ni h_4 ne sont convexes.

Exercice 9. Soit $f(x,y,z) = (2x+y)^2 + (2x+z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

$$C_1 = \{(x,y,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}, \ \ C_2 = \{(x,0,z), (x,z) \in \mathbb{R}^2\}, \ \ C_3 = \{(0,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est-ce que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$?

Correction 9. Calculons l'héssienne de f :

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Chacune de sous-déterminants

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 12, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4, \quad \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

   est strictement positive (et 14, 2, 14 aussi). Les matrices sont donc définie positive et les restrictions de f au hyperplan $x = 0$, au hyperplan $y = 0$ et au hyperplan $z = 0$ sont strictement convexe.

2. Pour montrer que f n'est pas convexe, observons d'abord que les sous-déterminants

$$14 > 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot (7-4) = 12 > 0, \qquad \det Hf = 2^3 \cdot (-1) = -8 < 0 .$$

   ne sont pas toutes positives, donc Hf n'est pas définie positive, et f n'est donc convexe.

Exercice 10. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0,2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A.
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Correction 10. 1. A est convexe comme produit de deux intervalles.

2. L'hessienne de f est

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} .$$

   On obtient que f est convexe sur $[0,1/2] \times [0,2]$ (car ${}^t v \cdot Hf \cdot v = 2a^2 + 12y^2 b^2 \geq 0$ pour $v = (a,b)$) et même strictement convexe sur $[0,1/2] \times]0,2]$.

3. A est compact car fermé et borné. Toute fonction continue atteint un minimum sur un compact, mais il se pourrait qu'il y en a plusieures. Une fonction strictement convexe sur un convexe n'a qu'au plus un minimum (comparez avec exo 11.2).

   Suppose que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux minima de f. En particulier $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$. Par la convexité, nous avons

$$f\big((1-s)\,(x_0,y_0) + s\,(x_1,y_1)\big) \leq (1-s)\, f\big(x_0,y_0\big) + s\, f\big(x_1,y_1\big)$$

pour tout $\lambda \in]0,1[$ et on déduit que f est constant sur le segment entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

On va distinguer deux cas : Si $y_1 \neq 0$, l'intérieure du segment se trouve aussi dans $[0, 1/2]\times]0, 2]$. Le minimum de de la restriction de f à $[0, 1/2]\times]0, 2]$ n'est pas unique, ce qui est une contradiction à la convexité stricte.

On obtient donc que forcement $x_0 = y_0 = 0$, mais on voit que la restriction $f(\cdot, 0)$ est convexe sur $[0, 1/2]$, il faut donc que le minimum de $f(\cdot, 0)$ soit unique.

4. Le gradient de f est $\nabla f = (2x - 2, 4y^3)$. Le seul point où ∇f s'annule est $(1, 0)$, mais ce point ne se trouve pas dans le domaine A. Forcement, f atteint donc son minimum sur le bord de A.

   En regardant les quatres fonctions $f_1(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x$, $f_2(x) = f(x, 2) = x^2 - 2x + 4$, $f_3(y) = f(0, y) = y^4$, $f_4(y) = f(1/2, y) = -3/4 + y^4$, nous trouvons les respetivement que le minimum globale de f_1 est $x = 1$, mais pas se trouvant sur $[0, 1/2]$, le minimum est $x = 1/2$, le minimum de f_2 est aussi $x = 1/2$, le minimum de f_3 est $y = 0$ et le minimum de f_4 est $y = 0$. Le minimum de f est donc le point $(x, y) = (1/2, 0)$.

Exercice 11. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Correction 11. 1. A est le produit de deux intervalles et donc convexe. f est lisse en son hessienne est

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{y^3}{6} + 1 & \frac{xy^2}{2} \\ \frac{xy^2}{2} & \frac{x^2y}{2} + 1 \end{pmatrix} .$$

   Avec le critère de Sylvester, il faut montrer que $x^2 + \frac{y^3}{6} + 1$ et $\det Hf$ sont positifs. Pour la première condition avec $y \geq -1$ sur A, nous obtenons la borne $x^2 + \frac{y^3}{6} + 1 \geq x^2 - \frac{1^3}{6} + 1 \geq \frac{5}{6} > 0$. Le déterminant nous donne $\det Hf = \frac{x^4y}{2} + x^2 - \frac{x^2y^4}{6} + \frac{y^3}{6} + 1 \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{6} > 0$ à nouveau car $|x|$ et $|y|$ sont bornés par 1.
   Ceci montre que f est strictement convexe sur A.

2. A est un compact et nous savons qu'une fonction continue atteint toujours un minimum sur un compact. Pour montrer l'unicité, soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) des minima (donc en particulier $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$) et suppose que $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$. Comme A est convexe, tout point $(1-s)\big(x_0, y_0\big) + s\big(x_1, y_1\big)$ sur le segment joignant les deux points apartient à A et la convexité *stricte* de f nous donne

$$f\big((1-s)\big(x_0, y_0\big) + s\big(x_1, y_1\big)\big) < (1-s)\, f\big(x_0, y_0\big) + s\, f\big(x_1, y_1\big) .$$

Nous voyons en contradiction que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) étaient les minima de f que f est encore plus petit sur tous les point intermédiaire. On déduit que $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$.

3. Le minimum de f se trouve à l'intérieure de A ou sur son bord. Une condition necéssaire pour avoir un minimum en un point à l'intérieure de A est que ∇f s'annule dans ce point. On a $\nabla f = \big(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^3}{6} + x, \frac{x^2y^2}{4} + y\big) = \big(\frac{x}{3}(x^2 + \frac{y^3}{2} + 3), y\,(\frac{x^2y}{4} + 1)\big)$. La seule solution de $\nabla f = (0,0)$ est $(x,y) = (0,0)$ car $x^2 + \frac{y^3}{2} + 3$ ne peut pas s'annuler sur A.
Comme $Hf(0,0)$ est définie positive, le minimum se trouve de f se trouve donc en $(0,0)$.

Exercices plus difficiles

Exercice 14.
1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E. Soit $f\colon C \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} .$$

Montrer que f est convexe.
3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 13)

Correction 14.
1. Idée : Si avec $x_0, x_1 \in C$, on a toujours que le point a mi-distance $x_{1/2} := \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ entre x_0 et x_1 se trouve aussi dans C, on déduit que le point à mi-distance entre x_0 et $x_{1/2}$ et le point à mi-distance entre $x_{1/2}$ et x_1 se trouvent aussi dans C et nous pouvons alors repéter cette construction arbitrairement souvent pour recupérer tous les points entre x_0 et x_1 de la forme

$$x_{a/2^n} := \frac{a}{2^n}\, x_0 + \frac{2^n - a}{2^n}\, x_1$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0, \ldots, 2^n\}$. Les nombres de la forme $a/2^n$ sont denses dans $[0,1]$, nous pouvons donc trouver pour n'importe quel $s_\infty \in [0,1]$ une suite s_j où est de la forme $s_j = a_j/2^{n_j}$ tel que $s_j \to s_\infty$.
Les points x_{s_j} sont tous dans C et ils convergent vers x_∞ et comme C est fermé, nous voyons que $x_\infty \in C$. Ceci montre que tout le segment entre x_0 et x_1 se trouve dan C, et C est donc convexe.
2. Pour prouver que f est convexe, il faut montrer pour tout $s \in]0,1[$ que

$$f\big((1-s)\,x + sy\big) \leq (1-s)\,f(x) + s\,f(y) . \tag{2}$$

On voit que l'inégalité est vraie pour tout $s = 1/4$ car

$$\begin{aligned} &f\big((1-1/4)\,x + 1/4\,y\big) = f\big(1/2\,x + 1/4\,x + 1/4y\big) \\ &\quad = f\big(1/2\,x + 1/2\,(1/2\,x + 1/2\,y)\big) \leq (1-1/2)\,f(x) + 1/2\,f\big(1/2\,x + 1/2\,y\big) \\ &\qquad \leq 1/2\,f(x) + 1/2\,\big(1/2\,f(x) + 1/2\,f(y)\big) \;. = 3/4\,f(x) + 1/4\,f(y) . \end{aligned}$$

Et nous pouvons de la même façon montrer qu'elle est vraie pour tout s de la forme $a/2^n$.
Pour un $s_\infty \in]0,1[$ nous trouvons avec la même construction utilisé ci-dessus une suite (s_n) qui converge vers $s_\infty \in C$ et l'inégalité (2) est vraie pour tous les s_k. Par continuité de f, l'inégalité reste vraie pour s_∞ et nous avons montrer que f est convexe.