Feuille d'exercices VIII.

Fonctions convexes

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a < b \in I$ et tout $x \in [a,b]$ on a $f(x) \leq f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$.
En déduire une preuve de l'inégalité des pentes.

Exercice 2. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f\colon I \to]0,+\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 5. Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 6. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 7. Montrer que si f est une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert et à valeurs réelles, et a est un minimum local de f, alors a est un minimum global.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 9. Montrer que le sup de deux fonctions convexes est convexe (on pourra penser à utiliser la caractérisation de la convexité par l'épigraphe).

Exercice 10. Soit f une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0\ f''(x) \geq af(x) \geq 0 .$$

1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

Exercice 11. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} \ .$$

Indication : utiliser l'identité $\frac{x^2}{x+y} = x\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ et utiliser (après l'avoir justifiée...) la convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle dans le plan, d'angles a, b, c. Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

1. $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) \leq \frac{3}{2}$.

Indication : combien vaut $a + b + c$? Pour la deuxième inégalité, on pourra supposer $a \geq b \geq c$ et distinguer les cas $a \leq \frac{\pi}{2}$ et $a \geq \frac{\pi}{2}$.