Feuille d'exercices VIII.

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Correction 1. Soit $(v_k) \subset F$ une suite qui converge en E vers un élément $v_\infty \in E$. Il faut montrer que v_∞ se trouve dans F. Supposons donc que ce n'était pas le cas.

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de F. Si $v_\infty \notin F$, alors $F' = F + \mathbb{R} \cdot v_\infty$ est un sous-espace de dimension finie qui admet une base $e_1, \dots, e_n, v_\infty$.
La restriction de $\|.\|$ à F' est une norme et clairement $v_k \to v_\infty$ par rapport à $\|.\|$.
Nous pouvons définir une deuxième norme sur F' par

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b v_\infty\|' := |a_1| + \dots + |a_n| + |b| \ .$$

Note que (v_k) ne converge pas vers v_∞ par rapport à la norme $\|.\|'$ car pour tous les $v_k = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in F$, nous obtenons

$$\|v_\infty - v_k\|' = |a_1| + \dots + |a_n| + 1 \geq 1 \ ,$$

donc $\|v_\infty - v_k\|' \not\to 0$.
Ceci est une contradiction parce que sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, donc en particulier la convergence des suites coïncide pour toutes les normes. On obtient donc que v_∞ doit forcement être dans F.

Exercice 2. Montrer que $[0,1]^n$ (avec distance euclidienne) est séparable.

Correction 2. Nous avons vu au début du semestre que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est aussi dénombrable. Nous obtenons donc que $\mathbb{Q}^n$ est un ensemble dénombrable.
Considère $A := [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Étant un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^n$, A est au plus dénombrable et il reste seulement à montrer que A est dense dans $[0,1]^n$.

Nous savons que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $q \in \mathbb{Q}$ tq $|r - q| < \varepsilon$.
Soit $(r_1, \dots, r_n) \in [0,1]^n$ et $\varepsilon > 0$ quelconque, nous pouvons choisir pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$ un $q_j \in \mathbb{Q}$ tq

$$|q_j - r_j| < \min\big\{r_j, 1 - r_j, \frac{\varepsilon}{n}\big\} \ .$$

Les deux premiers éléments du minimum, garantissent que chaque q_j se trouve dans l'intervalle $[0,1]$, car

— $|q_j - r_j| < r_j$ implique que $-r_j \leq q_j - r_j \leq r_j$, donc $0 \leq q_j$;
— $|q_j - r_j| < 1 - r_j$ implique que $-(1 - r_j) \leq q_j - r_j \leq 1 - r_j$, donc $q_j \leq 1$.

Alors $(q_1, \dots, q_n) \in A$.
Pour montrer que $(q_1, \dots, q_n) \in A$ est ε-proche de $(r_1, \dots, r_n)$, utilise

$$\big\|(r_1, \dots, r_n) - (q_1, \dots, q_n)\big\| \leq |r_1 - q_1| + \dots + |r_n - q_n| \leq \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \ .$$

Nous avons donc montré que A est un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans $[0,1]^n$.

Exercice 3. Soit $E = C^0([0,2],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(x)|\,dx$.

1. Soit $f_n(x) = \min(x^n, 1)$. Montrer que f_n est de Cauchy dans $(C^0([0,2],\mathbb{R}), \|.\|_1)$.
2. Est-ce que f_n converge dans E ? Est-ce que $(E, ||.||_1)$ est complet ?

Correction 3.

1. Les fonctions f_n sont de la forme

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

En particulier, nous voyons que les f_n sont continues en $x = 1$.
Pour voir que (f_n) est une suite de Cauchy par rapport à $\|.\|_1$, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, si n, k assez grands alors $\|f_n - f_k\|_1 < \varepsilon$.

Suppose que $n \geq k$, alors

$$\begin{aligned}\|f_n - f_k\|_1 &= \int_0^2 |f_n(x) - f_k(x)|\,dx = \int_0^1 |x^n - x^k|\,dx + \int_1^2 |1-1|\,dx \\ &= \int_0^1 x^k \underbrace{|x^{n-k} - 1|}_{\leq 2}\,dx \leq 2\int_0^1 x^k\,dx = \frac{2}{k+1}\ \left(x^{k+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{k+1}\ .\end{aligned}$$

Ceci montre que pour $N > \frac{2}{\varepsilon}$ et $\forall n, k > N$: $\|f_n - f_k\|_1 \leq \varepsilon$, donc (f_n) est bien une suite de Cauchy.

2. La limite simple de f_n est

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,2]\ . \end{cases}$$

Clairement cette fonction n'est pas continue donc elle n'est pas dans E. Mais ça ne ressoude pas notre problème car nous n'avons pas établi un lien entre la limite de (f_n) par rapport à $\|.\|_1$ et la limite simple. Nous allons montrer que (f_n) ne peut pas converger dans $(E, \|.\|_1)$ vers un f_∞ continue.
Suppose d'abord $c = f_\infty(1) \neq 0$: Par continuité de f_∞, il existe un $\delta > 0$ tq

$$|f_\infty| \geq \frac{|c|}{2}$$

sur l'intervalle $]1-\delta, 1+\delta[$.
Nous obtenons

$$|f_\infty(x)| = |f_\infty(x) - x^n + x^n| \leq |f_\infty(x) - x^n| + |x^n|$$

donc sur l'intervalle $]1-\delta, 1-\delta/2[\subset [0,1[$, nous avons la minoration $|f_\infty(x) - f_n(x)| \geq |f_\infty(x)| - |x^n| \geq \frac{|c|}{2} - |x^n| \geq \frac{|c|}{2} - (1-\delta/2)^n$. Si n est choisi assez grand, nous pouvons donc supposer pour tout $x \in]1-\delta, 1-\delta/2[$ que $|f_\infty(x) - x^n| \geq \frac{|c|}{4}$.
Avec cette borne nous obtenons finalement pour n assez grand

$$\begin{aligned}\|f_\infty - f_n\|_1 &= \int_0^2 |f_\infty(x) - f_n(x)|\,dx \geq \int_{1-\delta}^{1-\delta/2} |f_\infty(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\geq \int_{1-\delta}^{1-\delta/2} \frac{|c|}{4}\,dx = \frac{|c|}{4}\frac{\delta}{2} = \frac{|c|\,\delta}{8}\ .\end{aligned}$$

Donc si $c \neq 0$, alors f_∞ ne peut pas être la limite de (f_n).
Supposons maintenant que $f_\infty(1) = 0$. Nous trouvons par la continuité de f_∞ un $\delta > 0$ tq $|f_\infty| < 1/2$ sur l'intervalle $]1-\delta, 1+\delta[$, d'où

$$\begin{aligned} \|f_\infty - f_n\|_1 &= \int_0^2 |f_\infty(x) - f_n(x)|\, dx \geq \int_1^{1+\delta} |f_\infty(x) - f_n(x)|\, dx \\ &= \int_1^{1+\delta} |f_\infty(x) - 1|\, dx \geq \int_1^{1+\delta} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\delta}{2} \ . \end{aligned}$$

Ceci montre que f_∞ ne peut pas non plus être la limite de (f_n) même si $f_\infty(1) = 0$.
Comme (f_n) est une suite de Cauchy qui n'a pas de limite en E, on déduit que E n'est pas complet.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, montrer que $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-presque partout.

Correction 4. Soit f une fonction mesurable. Rappelons nous que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant essentiel de f si

$$f^{-1}\big(]M, \infty[\big) = \big\{x \in \Omega : \ f(x) > M\big\}$$

est une partie μ-négligeable. On définie

$$\|f\|_\infty = \inf\big\{M \in \mathbb{R} : \ \ M \text{ est un majorant essentiel de } |f|\big\} \ .$$

L'espace $L^\infty(\Omega, \mu)$ est l'espace de toutes les fonctions mesurables f sur Ω pour lesquels $|f|$ admet un majorant essentiel.

L'exercice revient à montrer que $\|f\|_\infty$ est un majorant essentiel de $|f|$ car dans ce cas, l'ensemble

$$A_\infty := \big\{x \in \Omega : \ |f(x)| > \|f\|_\infty\big\}$$

est μ-négligeable.
On définie $A_n := \big\{x \in \Omega : \ |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\big\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vu que $\|f\|_\infty + 1/n$ est un majorant essentiel, nous avons $\mu(A_n) = 0$.
Soit (g_n) la suite de fonctions mesurables

$$g_n(x) = \mathbf{1}_{A_n}(x) \ .$$

La suite A_n est croissante (dans le sens que $A_n \subset A_{n+1}$) faisant de (g_n) une suite croissante.
Nous avons $A_\infty = \cup_n A_n$ et g_n converge simplement vers $\mathbf{1}_{A_\infty}$. Avec le théorème de la convergence monotone, nous obtenons

$$\mu(A_\infty) = \int \mathbf{1}_{A_\infty}(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ .$$

Alors A_∞ est μ-négligeable et $\|f\|_\infty$ est un majorant essentiel.

Exercice 5. Soit $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \mathbf{1}_{]0,1]}(x^2+y^2)$.

1. Montrer que $f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. (Indication, on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires).
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ et calculer $\|\sqrt{f}\|_1$.
3. En déduire que $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ n'est pas inclus dans $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$. Est-ce que $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$ inclus dans $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$?

Correction 5.

1. f est mesurable et positive. Nous allons montrer que
$$\int_{]0,1[^2} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \infty\ .$$
Note que sur le carré $]0,1[^2$, f s'annule en dehors du quart de disque
$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2 < 1,\ x>0,\ y>0\big\}$$
et nous pouvons réécrire
$$\int_{]0,1[^2} f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) = \int_B \frac{1}{x^2+y^2}\, d\lambda_2(x,y)\ .$$
Pour cette dernière intégrale, nous paramétrons B avec des coordonnées polaires $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ et $B \cong B' = \big\{(r,\phi) \bigm| 0<r<1,\ 0<\phi<\pi/2\big\}$.
Alors en utilisant le Théorème de Fubini–Tonelli (car $f \geq 0$)
$$\begin{aligned}\int_B f(x,y)\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{B'} \frac{1}{r^2}\, r\, d\lambda_2(r,\phi) = \int_0^1 \Big(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r}\, d\phi\Big)\, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{r}\, dr = \frac{\pi}{2} \ln r\Big|_0^1 = \infty\ .\end{aligned}$$

2. $\sqrt{f}$ est mesurable et positive, écrivons
$$\|\sqrt{f}\|_1 = \int_{]0,1[^2} \sqrt{f(x,y)}\, d\lambda_2(x,y) = \int_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\lambda_2(x,y)$$
et avec des coordonnées polaires, nous obtenons
$$= \int_{B'} \frac{1}{r}\, r\, d\lambda_2(r,\phi) = \int_{B'} d\lambda_2(r,\phi) = \int_0^1 \Big(\int_0^{\pi/2} d\phi\Big)\, dr = \frac{\pi}{2} < \infty\ .$$

3. Nous avons montré que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. Comme $\|\sqrt{f}\|_2 = \big(\int f\, d\lambda_2\big)^{1/2} = \infty$, nous voyons que $\sqrt{f} \notin L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$.
Par contre, si $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $\lambda_n(A) < \infty$, il est facile à prouver que tout $f \in L^2(A, \lambda_n)$ appartient aussi à $L^1(A, \lambda_n)$. On utilise que $1 \in L^2(A, \lambda_n)$ car
$$\|1\|_2 = \Big(\int_A 1^2\, d\lambda_n\Big)^{1/2} = \sqrt{\lambda_n(A)} < \infty\ .$$

En combinant une petite astuce, avec le produit scalaire et Cauchy-Schwarz, nous voyons

$$\|f\|_1 = \int_A f \, d\lambda_n = \int_A 1 \cdot f \, d\lambda_n = \langle 1, f \rangle_{L^2} \leq \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 = \sqrt{\lambda_n(A)} \cdot \|f\|_2 < \infty \, .$$

Cette inégalité montre en fait même, que le plongement de $L^1(A, \lambda_n)$ dans $L^2(A, \lambda_n)$ pour A de mesure finie est continue.