Feuille d'exercices VIII.

Espaces complets, espaces séparables, espaces L^p.

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 2. Un espace métrique est dit *séparable* si il contient un sous-ensemble dense a.p.d. Montrer que $[0,1]^n$ (avec distance euclidienne) est séparable .

Exercice 3. Soit $E = C^0([0,2], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_1$ définie par $||f||_1 = \int_0^2 |f(x)|dx$.

1. Soit $f_n(x) = \min(x^n, 1)$. Montrer que f_n est une suite de Cauchy dans $(C^0([0,2], \mathbb{R}), ||.||_1)$.
2. Est-ce que f_n converge dans E ? Est-ce que $(E, ||.||_1)$ est complet ? (Rappelons qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy est convergente.)

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, montrer que $|f| \leq ||f||_\infty$ μ-presque partout.

Exercice 5. Soit $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} 1_{[0,1]}(x^2+y^2)$.

1. Montrer que $f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$. (Indication, on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires).
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ et calculer $||\sqrt{f}||_1$.
3. En déduire que $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$ n'est pas inclus dans $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$. Est-ce que $L^2(]0,1[^2, \lambda_2)$ inclus dans $L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$?

Exercice 6. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. On rappelle que $\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ pour la mesure de comptage ν.

1. Soit $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. Pour quel α a-t-on $u = (u_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$?
   En déduire que $\ell^q(\mathbb{N}) \not\subset \ell^p(\mathbb{N})$.
2. Soit v_n une suite telle que pour tout n, $|v_n| \leq 1$, montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p.$$
3. Montrer que la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$ est inclus dans la boule unité de $\ell^q(\mathbb{N})$.
4. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et pour tout $v \in \ell^p(\mathbb{N})$ $||v||_q \leq ||v||_p$.

Exercice 7. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$, λ la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace de $L^p(]0,1], \lambda)$.
2. Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Pour quel $\alpha > 0$ a-t-on $f_\alpha \in L^p(]0,1], \lambda)$? En déduire que $L^q(]0,1], \lambda)$ est un sous-espace strict de $L^p(]0,1], \lambda)$.
3. Soit $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par $g_\alpha = \frac{1}{(x+1)^\alpha} 1_{]0,+\infty[}(x)$. Pour quel α a-t-on $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$?
4. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ et $L^p(\mathbb{R}, \lambda)$? (justifier)

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy, et que la réciproque est fausse en général (on pourra par exemple considérer la suite définie par $x_n = 2^{-n}$ dans l'espace $X =]0, +\infty[$ muni de sa distance usuelle).
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X. Montrer que (x_n) est bornée.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On le munit de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels, est dense dans E.
2. Montrer que E est séparable.
3. Montrer que $E \subset (C^0([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ n'est pas fermé. (Rappelons le théorème d'approximation de Weierstrass : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $C^0(K,\mathbb{R})$ l'espace de fonctions réelles continues sur K. Alors les fonctions polynomiales en n variables à coéfficients réels sont denses dans $C^0(K,\mathbb{R})$.)
4. Est-ce que E est complet ?

Exercices plus difficiles

Exercice 10. Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions C^1 sur $[0,1]$ (la dérivée en 0 est la dérivée à droite et celle en 1 la dérivée à gauche).
On munit E de la norme

$$||f||_E = \sup_{x\in[0,1]} \max(|f(x)|, |f'(x)|).$$

1. Soit $U(f) = (f, f')$. Montrer que $U : E \to C^0([0,1],\mathbb{R})^2$ est une application linéaire isométrique (quand $C^0([0,1],\mathbb{R})^2$ est muni de la norme produit de la norme infinie $||(f,g)|| = \max(||f||_\infty, ||g||_\infty)$
2. Montrer que $C^0([0,1],\mathbb{R})^2$ est complet.
3. Montrer que l'image $U(E)$ est fermé dans $C^0([0,1],\mathbb{R})^2$, en déduire que E est complet.
4. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que les polynômes sont denses dans E. En déduire que E est séparable.

Exercice 11. Soient $1 \le p < +\infty, 1 \le q < +\infty$, λ la mesure de Lebesgue. On cherche à montrer que $B = \{f \in L^p(\mathbb{R},\lambda) : ||f||_q \le 1\}$ est fermé dans $L^p(\mathbb{R},\lambda)$.

1. Soit $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ avec $\lambda \in]0,1[$. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R},\lambda) \cap L^q(\mathbb{R},\lambda)$, alors $f \in L^r(\mathbb{R},\lambda)$ et on a
$$||f||_r \le ||f||_p^{\lambda p/r} ||f||_q^{(1-\lambda)q/r}.$$
2. On suppose que $f_n \in B$ et que $||f_n - f||_p \to 0$. Montrer que pour $r \in]\min(p,q), \max(p,q)[$, on a $||f_n - f||_r \to 0$. Qu'en déduit-on sur $||f||_r$?
3. Montrer que $||f||_r \to ||f||_q$ pour $r \to q$.
4. Conclure.

Exercice 12. Soient (X,d) un espace métrique complet, et $f\colon X \to X$ une application telle que

$$\exists k < 1 \; \forall x \neq y \in X \quad d(f(x), f(y)) \le k d(x,y) \; .$$

Montrer que f est continue et admet un unique point fixe.

Exercice 13.

1. Montrer $P := \{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} = \{f \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : f(1-f) = 0\}$.
2. En déduire que P est un sous-ensemble fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
3. Montrer que pour $f \neq g \in P$, $||f - g||_\infty = 1$.
4. En déduire que P puis $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ne sont pas séparables.
5. ($\star$) Montrer que $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{](1/n+2),1/(n+1)]}$ définit une isométrie $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to L^\infty([0,1], Leb)$ et en déduire que $L^\infty([0,1], Leb)$ n'est pas séparable.