Feuille d'exercices IX.

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire ; espaces métriques complets ; espaces de Hilbert.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1. Rappeler et vérifier l'identité de polarisation.
2. Faire un dessin, énoncer et vérifier l'identité du parallélogramme.
3. Montrer que le produit scalaire définit une application continue de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Montrer que, si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par
$$\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu$$
est un produit scalaire sur $L^2(X)$.
2. À quoi correspond la norme associée ?
3. Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage, décrire $L^2(\mathbb{N})$, le produit scalaire et la norme associés. On note cet espace de Hilbert, $l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Montrer que, pour $A \subseteq E$:

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A^\perp$ est fermé dans E.
3. $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Montrer que, si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $i_1, \ldots, i_n \in I$
$$\| \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{i_k} \|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \|a_{i_k}\|^2 \ .$$
Remarquer que le théorème de Pythagore est un cas particulier de l'égalité ci-dessus.

Exercice 5. On se place dans l'espace $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$. On considère la famille $(u_k)_{k \geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthogonale.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy, et que la réciproque est fausse en général (on pourra par exemple considérer la suite définie par $x_n = 2^{-n}$ dans l'espace $X =]0, +\infty[$ muni de sa distance usuelle).

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X. Montrer que (x_n) est bornée.

Exercice 8. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f \colon X \to X$ une application telle que
$$\exists k < 1 \ \forall x \neq y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \ .$$
Montrer que f est continue et admet un unique point fixe.

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $L^\infty(X)$ est un espace complet.

Exercice 11. Soit E un espace de Hilbert. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est dense dans E si, et seulement si, $F^\perp = \{0_E\}$.

Exercice 12. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de vecteurs d'un espace de Hilbert E. Montrer que $(a_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si, et seulement si,

$$\forall x \in E \quad (\forall i \in I \ \langle x, a_i\rangle = 0) \Leftrightarrow x = 0_E \ .$$

Exercice 13. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert. Montrer que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Exercice 14. Soit A une partie compacte d'un espace métrique (X, d). Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x, a_0) = d(x, A)$ où $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}$.

Exercice 15. On considère $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme (on pourra considérer deux fonctions f et g de normes 1 tel que $f + g$ et $f - g$ soient également de norme 1). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est associée à aucun produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
3. On considère $F = \{f \in E \colon f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)dx \geq 1\}$.
   (a) Montrer que F est fermé.
   (b) Montrer que F est convexe.
   (c) Montrer que pour tout $f \in F$, on a $\|f\|_\infty > 1$.
   (d) Montrer que $\inf_{f\in F} \|f\|_\infty = 1$.
   (e) En déduire que $d(0_E, F)$ n'est pas atteinte.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire possédant une famille orthonormale $(e_n)_{n>0}$. On considère $F = \left\{(1 + \frac{1}{n})e_n \colon n > 0\right\}$.

1. Montrer que 0_E n'a pas de projection sur F.
2. Montrer que pour tout $n \neq m$, $\|(1 + \frac{1}{n})e_n - (1 + \frac{1}{m})e_m\| \geq 1$. En déduire que F est fermé.
3. Expliciter un tel exemple pour l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$.

Exercice 17. On considère un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que son centre de gravité a trois projections.

Exercice 18. Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0_E\}$. Notons p la projection de E sur F.

1. Vérifier que $p \circ p = p$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.
3. Montrer que $\|p\| = 1$ (on rappelle que par définition $\|p\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|p(x)\|$).

Exercice 19. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormale.

Exercice 20. Un théorème d'approximation de Weierstrass montre que toute fonction réelle définie et continue sur $[-1, 1]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales à coefficients rationnels. Notons que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients rationnels est dénombrable. En déduire que l'espace de Hilbert $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est séparable.

Exercice 21 (Polynômes de Legendre)**.** On se place dans l'espace de Hilbert $(C([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

1. En utilisant l'exercice précédent et le procédé de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une base hilbertienne $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction p_n est une fonction polynomiale de degré n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale l_n définie par $l_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ pour $t \in [-1,1]$ (polynômes de Legendre).
   (a) Montrer que la famille $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
   (b) Déterminer le degré de l_n pour chaque n.
   (c) En déduire que pour chaque n on a $p_n = \dfrac{l_n}{\|l_n\|}$.

Exercice 22. Soit E un espace de Hilbert possédant une base hilbertienne dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On considère la partie A des combinaisons linéaires finies de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels. Notons que A est dénombrable. Montrer que A est dense dans E

Exercice 23. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x$. A l'aide de l'égalité de Parseval, en déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$