Feuille d'exercices IX.

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire ; espaces de Hilbert.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire (réel). Montrer que, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ (donc tels que $i_j \neq i_k$ si $k \neq j$)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \|a_{i_k}\|^2 .$$

Remarquer que le théorème de Pythagore est un cas particulier de l'égalité ci-dessus. Qu'est-ce qui change si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien ?

Exercice 2. Une Identité du parallélogramme généralisée Soit H un espace euclidien de norme $|| \cdot ||$.

1. Montrer que pour $t \in]0,1[$, on a pour $x_1, x_2 \in H$:

$$||tx_1 + (1-t)x_2||^2 + t(1-t)||x_1 - x_2||^2 = t||x_1||^2 + (1-t)||x_2||^2.$$

2. En déduire que $x \mapsto ||x||^2$ est strictement convexe.

Exercice 3. Soit $H = \mathbb{R}^2$. On pose $K = [0,1]^2$ et $C = [0, +\infty[^2$

1. Montrer que C, K sont des convexes fermés. Sont-ils compacts ?
2. Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la projection sur K est donnée par la formule

$$P_K(x) = (min(x_1, 1)1_{]0,+\infty[}(x_1), min(x_2, 1)1_{]0,+\infty[}(x_2)).$$

3. Rappeler la relation entre P_K et cône normal (vu au chapitre sur la convexité) et en déduire $N_K((1,1))$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}^2$. Calculer $P_C(x)$ (Indication : on pourra deviner une formule et utiliser la propriété caractéristique de P_C, une généralisation est à l'exercice 14).

Exercice 4. On se place dans l'espace de Hlbert $L^2([0,1], \lambda; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. On considère la famille $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sin(2k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthogonale. Est-ce une base hilbertienne ?

Exercice 5. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormale.

Exercice 6. On désigne par $\mathcal{C}([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles et continues sur $[-1,1]$. En tant que sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2([-1,1], \lambda; \mathbb{R})$, $\mathcal{C}([-1,1])$ est un espace euclidien de dimension infinie muni du produit scalaire (voir exercice 12)

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg d\lambda.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ est séparable. (Indication : on pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.)
2. On se propose de montrer que $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas complet, donc, n'est pas un espace de Hilbert.

   Pour chaque entier $n > 0$ on pose

$$\phi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -1/n \\ nt & \text{si } -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Montrer que (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([-1,1])$.

(b) Soit

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Montrer que $\| \psi - f \|_2 > 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$.(La norme $\| \cdot \|_2$ de $L^2([-1,1],\lambda;\mathbb{R})$ est défini par $\| x \|_2^2 = < x, x >$.)

(c) En utilisant l'inégalité de Minkowski montrer que la suite (ϕ_n) ne converge pas dans $\mathcal{C}([-1,1])$.

(d) Conclure.

3. Est-ce que $\mathcal{C}([-1,1])$ fermé dans $L^2([-1,1],\lambda;\mathbb{R})$?

Exercice 7. Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $T : H \to H$ une application linéaire continue.

1. Soit $x \in H$. Montrer (en utilisant le théorème de Riesz) qu'il existe un unique $z \in H$, tel que pour tout $y \in H$:
$$\langle z, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$
2. En utilisant le même théorème, montrer que la norme subordonnée est donné par :
$$|||T||| = \sup_{||y|| \le 1} \sup_{||x|| \le 1} |\langle x, Ty \rangle|.$$
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire : $T^* : H \to H$ (appelée adjoint de T) telle que :
$$\forall x, y \in H : \langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle.$$
4. Montrer que la norme subordonnée de T^* est la même :
$$|||T^*||| = |||T|||.$$
5. Montrer que
$$(T^*)^* = T.$$
6. Si $H = \mathbb{C}^n$ et $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ la base orthonormale canonique, exprimer la matrice de T^* dans la base canonique en fonction de la matrice $A = (a_{i,j})$ de T.

Exercice 8 (Polynômes de Legendre)**.** On se place dans l'espace de Hilbert

$$H = (L^2([-1,1],\lambda;\mathbb{R}), \| \cdot \|_2).$$

1. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une famille orthonormale de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction p_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. En utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que la famille de polynômes de la question précédente $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale l_n définie par
$$l_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$
pour $t \in [-1,1]$ (polynômes de Legendre).

(a) Déterminer le degré de l_n pour chaque n.

(b) Montrer que la famille $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale (Indication : calculer par intégration par partie $\langle l_n, P \rangle$ avec P polynôme de $deg(P) < n$).

(c) En déduire que pour chaque n, on a $p_n = \dfrac{l_n}{\|l_n\|_2}$.

Exercice 9. Soient H un espace de Hilbert (complexe) et $u \in L(H,H)$ une application linéaire continue. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $||u(x)||_2 = ||x||_2$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle ux, uy\rangle = \langle x, y\rangle$
3. $u^*u = Id$ (u^* est l'adjoint de l'exercice précédent)

(Indication :penser à l'identité de polarisation).

Exercice 10. Soit $H = L^2([-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi}\lambda; \mathbb{C})$. Soit $e_n(x) = exp(inx)$. On rappelle que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de H. Soit f la fonction définie par $f(x) = x$.

1. Calculer les nombres $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$ (ce sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction f)
2. En déduire une formule pour f en terme des $(c_n(f))$.
3. En utilisant l'égalité de Parseval, en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Exercices de cours

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1. Rappeler et vérifier l'identité de polarisation.
2. Faire un dessin, énoncer et vérifier l'identité du parallélogramme.
3. Montrer que le produit scalaire définit une application continue de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par
$$\langle f, g\rangle = \int_X \overline{f} g d\mu$$
est un produit scalaire (complexe) sur $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{C})$.
2. Quelle est la norme associée ?
3. Montrer que pour tout $f \in H$, $\langle f, \cdot\rangle : H \to \mathbb{C}$ définit une application linéaire continue.
4. Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ où ν est la mesure de comptage, décrire $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu; \mathbb{C})$, le produit scalaire et la norme associés.

Exercices plus difficiles

Exercice 13. Une autre Identité du parallélogramme généralisée Soient H un espace de Hilbert et $x_1, ..., x_n \in H$
Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} ||\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n||^2 = ||x_1||^2 + \dots + ||x_n||^2.$$

Exercice 14. Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R})$. On pose $C = \{f \in H : f \geq 0\ \mu - p.p.\}$.
Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f1_{\{f\geq 0\}}$.

Exercice 15. Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{R})$. On pose $K = \{f \in H : 1 \geq f \geq 0\ \mu - p.p.\}$.
Montrer que K est un convexe fermé et que $P_K(f) = f1_{\{1\geq f\geq 0\}}$.

Exercice 16. Soient H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé différent de $\{0\}$. Soit P une projection de H sur F, c'est à dire une application linéaire $P : H \to H$ telle que $P^2 = P$ d'image F. On rappelle qu'on munit l'espace vectoriel des applications linéaires continues $L(H,H)$ de la norme subordonnée $|||.|||$.
Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale P_F
2. P est continue et $|||P||| = 1$
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq ||x||^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice 17. Soit A une partie compacte d'un espace métrique (X, d). Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x, a_0) = d(x, A)$ où $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}$.

Exercice 18. On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme (on pourra considérer deux fonctions f et g de normes 1 tel que $f+g$ et $f-g$ soient également de norme 1). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est associée à aucun produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
3. On considère $F = \{f \in E \colon f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)dx \geq 1\}$.
   (a) Montrer que F est fermé.
   (b) Montrer que F est convexe.
   (c) Montrer que pour tout $f \in F$, on a $\|f\|_\infty > 1$.
   (d) Montrer que $\inf_{f\in F} \|f\|_\infty = 1$.
   (e) En déduire que $d(0_E, F)$ n'est pas atteinte.

Exercice 19 (Polynômes de Laguerre)**.** On se place dans l'espace de Hilbert $H = (L^2([0,\infty[, \mu; \mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ avec μ la mesure sur la tribu borélienne de $[0,\infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de lebesgue c'est-à-dire $\mu(A) = \int_A e^{-x}dx$.
Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynomiale de la forme :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

2. Soit Q un polynôme de degré $m < n$ montrer que $\langle L_n, Q\rangle = 0$ (Indication : intégrer par partie).
3. Montrer que L_n est une famille orthonormale de H.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la norme de $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{(t+i)^n} L_n$. En déduire que S_N converge dans H.
5. Soit

$$f_t(x) = \frac{i+t}{i}e^{ixt}.$$

   Montrer que $\langle L_n, f_t\rangle = \frac{t^n}{(i+t)^n}$.
6. Montrer que S_N converge dans H vers f_t.
7. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de H. (Indication : montrer que tout f orthogonal aux L_n a une transformée de Fourier nulle et utiliser le théorème d'inversion de Fourier).

Exercice 20. Montrer que la famille indicée par les parties finies de $\mathbb{N}^*$, $(w_I)_{I\in P_f(\mathbb{N}^*)}$ définie par

$$w_I(x) = \prod_{i\in I} w_i(x), \quad \text{avec } \ w_n(x) = (-1)^{\lfloor 2^n x\rfloor}$$

est une base hilbertienne de $H = L^2([0,1], \lambda; \mathbb{R})$. (Elle est appelée base de Walsh).
(Indication : Pour montrer la densité, on pourra montrer que si $f \in H$ est orthogonale à w_I pour tout I alors $\int_{[0,a]} f d\lambda = 0$ pour tout $a \in [0,1]$ et utiliser le théorème de différentiation de Lebesgue selon lequel pour une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}, \lambda; \mathbb{R})$, la fonction $G(x) = \int_{]-\infty,x]} g d\lambda$ est presque partout dérivable de dérivée g).