2016/2017 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Examen final - Mercredi 4 janvier 2017

Durée 3h.

Documents et téléphones portables sont interdits. Une attention particulière sera portée à la rédaction lors de la correction.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Donner la démonstration du fait que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) \ .$$

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, et $f\colon H \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. On suppose que f n'est pas l'application nulle.

1. Montrer que le noyau de f est fermé.
2. Montrer qu'il existe $y \in \ker(f)^\perp$ tel que $f(y) = 1$.
3. En utilisant le fait que pour tout $x \in H$ on a $x = (x - f(x)y) + f(x)y$, montrer que le supplémentaire orthogonal de $\ker(f)$ est la droite $\mathbb{R}y$.
4. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\langle x, y\rangle = \|y\|^2 f(x)$.

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t)^2}\, dt$.

1. Dans cette partie, on étudie le domaine de définition de f et sa continuité sur ce domaine.
   (a) Montrer que f n'est pas définie en 0.
   (b) Soit $a > 0$. Montrer que f est définie et continue sur $[a, +\infty[$.
   (c) En utilisant la parité de f, montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Le but de cette partie est de montrer que $x \to xf(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$ fixé, $\dfrac{x^4}{(x^2+t)^2}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+t^2)(x^2+t)^2}\, dt$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}\, dt$ quand x tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^4}$.
   (d) Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\, dx$ converge.

3. Dans cette dernière partie, on calcule $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x)\,dx$.

   (a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)(1+t)}$.

   (b) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)}$.

   (c) Calculer I.

Exercice 4. 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour $x, y \in I$ on définit

$$\Delta f(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ .$$

A l'aide de l'inégalité des pentes, justifier que si $x, y, x', y' \in I$ et $x \leq x' \leq y \leq y'$ alors on a

$$\Delta f(x,y) \leq \Delta f(x',y') \ .$$

2. Déterminer tous les réels p tels que $x \mapsto x^p$ est convexe sur $]0,+\infty[$.
3. Prouver que pour tout $n > 0$ on a

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+4)^3}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+3)^3} - \frac{1}{(n+5)^3}\right)$$

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique compact, et $f\colon X \to X$ une application telle que

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y) \ .$$

On souhaite montrer que f est surjective.

1. Montrer que f est continue et que $f(X)$ est fermé dans X.

Dans la suite on raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas surjective : on considère alors un élément $a \in X$ tel que $a \notin f(X)$.

2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in X \quad d(a, f(x)) \geq \varepsilon \ .$$

3. Montrer que pour tout $n \neq m \in \mathbb{N}$ on a $d(f^n(a), f^m(a)) \geq \varepsilon$.
4. Montrer que la suite $(f^n(a))$ n'admet pas de sous-suite convergente.
5. Conclure.