2018/2019 | Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I | Topologie et théorie de la mesure

Feuille d'exercices VI.

Théorème de Fubini

Exercice 1. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 2. On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y = 0$, $y = 1$, $y = 2 - x$ et $y = 1 + \frac{x}{2}$. Calculer $\iint_\Delta xy dx\, dy$.

Exercice 3. Calculer $\iint_D (x + y)e^{-(x+y)} dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 1\}$.

Exercice 4. Soit Δ le triangle de sommets $(0, -1)$, $(3, 1)$ et $(0, 1)$. Calculer $\iint_\Delta xy^2 dxdy$.

Exercice 5. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y-2| \leq 1 \text{ et } (x-1)(x-y) \leq 0\}$. Calculer $\iint_E e^{(3-x)^2} dxdy$.

Exercice 6. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| \leq 2,\ |x| \leq \frac{y^2}{4} + 1,\ y \leq x^2 + 1\}$. Calculer l'aire de D.

Exercice 7. Soit $D = [0, 1]^2$. Calculer $\iint_D \frac{dx\, dy}{(x + y + 1)^2}$.

Exercice 8. On note D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x+2$ et $y = -x$. Calculer $I = \iint_D (x - y)dxdy$.

Exercice 9. En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x} \sin(2xy) dydx,$$

déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Exercice 10. 1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est bien définie et que $I = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\frac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 11. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$ et par $g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx}\, dx$, respectivement.

1. Pour $t > 0$, calculer $g(t)$ en partant de l'égalité $\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy$.
2. Pour $t > 0$, calculer $f(t)$ en partant de l'égalité $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x} dy$.
3. On a vu (exercice 4 feuille VI) que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 12. Pour $y > 0$, on considère la fonction f_y définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_y(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que chaque $y > 0$, la fonction f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

TD6 – Théorème de Fubini

EX1 – $f(x,y) : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculons $I_1 = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{[-1,1]} \left[-\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \right]_{-1}^{1} dy$.

la fct. $x \mapsto \begin{cases} f(x,y) \\ 0 \end{cases}$ pour y fixé $\in [-1,1] \setminus \{0\}$ est continue en 0. et donc intégrable sur $[-1,1]$

On calcule $I_1 = \int_{[-1,1]} 0 \, dy = 0$

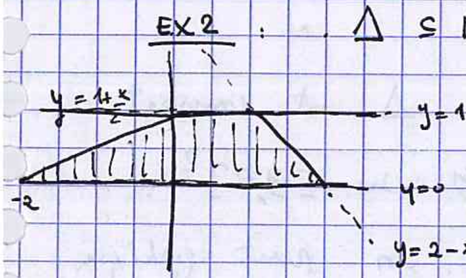
De même $I_2 = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} f(x,y)\, dy \right) dx = 0$.

2) On vérifie $\int_{[-1,1]^2} \left| \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \right| dx\, dy = \int_{[-1,1]^2} |y| \left(\int_{[-1,0]} -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \int_{[0,1]} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right)$

$= \ldots = \infty$

donc $f(x,y)$ n'est pas λ_2 ~~mesure~~ intégrable.

EX2 : $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad\Delta$ délimité par $y=0$, $y=1$, $y=2-x$, $y=1+\frac{x}{2}$



$f(x,y) = xy$.

Δ est compact car : fermé comme intersection des fermés $\{(x,y),\ y \geq 0\}$, $\{(x,y),\ y \leq 1\}$, $\{(x,y),\ y \leq 2-x\}$, $\{(x,y),\ y \leq 1+\frac{x}{2}\}$

et borné ~~(par la boule fermée~~ dans $[-2,2]^2$.)

D'autre part $f(x,y) = xy$ est continue donc $I = \int_\Delta f(x,y)\, \lambda_2$ ~~est~~ bien finie et $|f|$ intégrable.

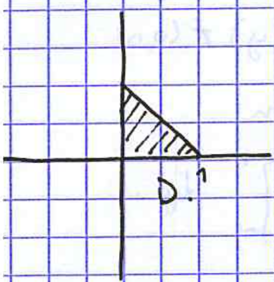
Par le théorème Fubini

$$I = \int_0^1 \left(\int_{2(y-1)}^{2-y} xy\, dx \right) dy = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2(y-1)}^{2-y} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} \left((2-y)^2 - 4(y-1)^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} (4 - 4y + y^2 - 4y^2 + 8y - 4)\, dy = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} y^3 + 2y^2 \right) dy$$

$$= \left[-\frac{3}{8} y^4 + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = -\frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{7}{24}$$

EX 3 _ $J = \iint_D (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx\,dy$ où $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1 \right\}$



$$f(x,y) = (x+y)\, e^{-(x+y)}$$

La fonct. f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
D est fermé = intersect de 3 fermés
borné $\subseteq [0,1]^2$.
$\Rightarrow$ compact.

Alors $|f|$ intégrable.

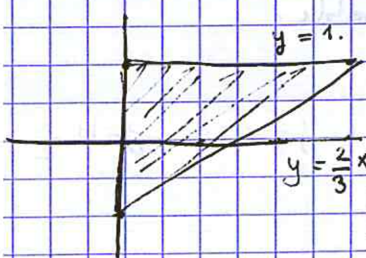
$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x+y)\, e^{-(x+y)}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[-(x+y)\, e^{-(x+y)} \right]_0^{1-x} + \int_0^{1-x} e^{-(x+y)}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-e^{-1} + x e^{-x} + \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^{1-x} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{e} + x e^{-x} - \frac{1}{e} + e^{-x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{e}x - x e^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{e}x - e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{e} - 3e^{-1} + 2 = -\frac{5}{e} + 2.$$

EX 4 _ Δ triangle $(0,-1)$, $(3,1)$, $(0,1)$



$$I = \iint_\Delta x y^2\, dx\,dy.$$

$f(x,y) = xy^2$ est continue et Δ est compact
puisque int. 3 fermés et $\Delta \subseteq$ ~~cube~~ cube $[-3,3]^2$.

Donc $|f|$ intégrable sur Δ. On peut appliquer Fubini :

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{(y+1)\frac{3}{2}} x y^2\, dx \right) dy = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \left[x^2 \right]_0^{(y+1)\frac{3}{2}} dy = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2} \left((y+1)^2\, \frac{9}{4} \right)$$

$$= \frac{9}{8} \int_{-1}^1 (y^3 + 2y^2 + y)\, dy = \frac{9}{8} \left[\frac{y^4}{3} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{9}{8} \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{2}$$

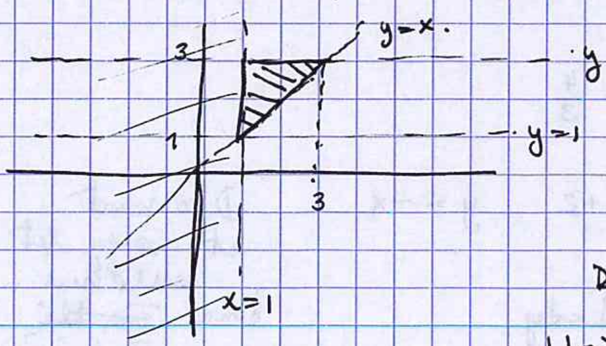
Ex 5. $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |y-2|\le 1,\ (x-1)(x-y)\le 0\}$.

on a $1\le y\le 3$ et $\left|\begin{array}{l} x-1\le 0 \text{ et } x-y\geq 0 \\ \text{ou} \\ x-1\geq 0 \text{ et } x-y\le 0.\end{array}\right.$

si $x\le 1$ et $x\geq y \Rightarrow y\le 1$ et donc $y=1$ $x=1$

$E=\{(1,1)\}$ et $\int_E e^{(3-x)^2}dxdy=0$.

si $x\geq 1$ et $x-y\le 0$ on a la région.



E = int. 3 ensembles fermés donc fermé
il est borné car $\subseteq [0,3]^2$.
d'où E est compact.

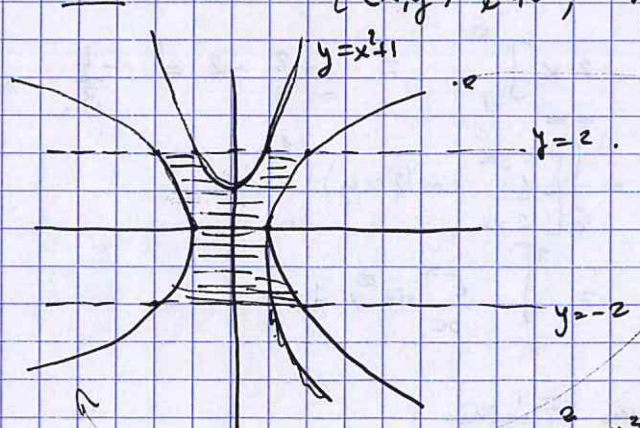
De plus $f(x,y)=e^{(3-x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$
d'où $|f|$ intégrable.

Par Fubini $I=\iint_E e^{(3-x)^2}dxdy=\int_1^3\left(\int_x^3 e^{(3-x)^2}dy\right)dx$

$=\int_1^3\left[y\,e^{(3-x)^2}\right]_x^3 dx=\int_1^3(3-x)\,e^{(3-x)^2}dx$

$=\left[-\frac{1}{2}e^{(3-x)^2}\right]_1^3=\frac{1}{2}e^4$

Ex 6 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |y|\le 2,\ |x|\le \frac{y^2}{4}+1,\ y\le x^2+1\}$.



$x=\frac{y^2}{4}+1$.

$x=-\frac{y^2}{4}-1$

D = intersect de fermés et borné $\subseteq[-2,2]^2$. d'où compact.

let $f(x,y)=1$ continue donc intégrable.

donc $I=\iint_D 1\,dxdy$

par Fubini

$I=4\int_0^2\int_0^{\frac{y^2}{4}+1}1\,dx\,dy-\int_{-1}^1\int_{x^2+1}^2 1\,dy\,dx$

$=4\int_0^2\left(\frac{y^2}{4}+1\right)dy-\int_{-1}^1(1-x^2)dx$

$=4\left[\frac{y^3}{12}+y\right]_0^2-\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1$

$=4\left(\frac{2}{3}+2\right)-\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{3}-\frac{4}{3}=\frac{28}{3}$.

Ex7. $D = [0,1]^2$ on veut calculer $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$

sur $[0,1]^2$ $f(x,y) = \frac{1}{x+y+1}$ est positive

on peut donc appli. Fubini-Tonelli

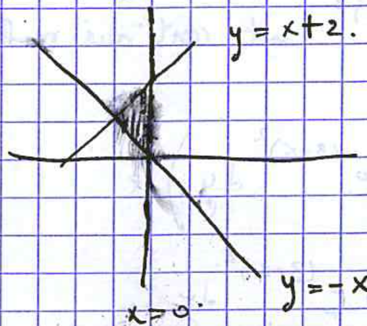
$$I = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 -\left[\frac{1}{x+y+1}\right]_0^1 dy = \int_0^1 -\left(\frac{1}{y+2} - \frac{1}{y+1}\right)dy.$$

$$= -\left[\ln|y+2| - \ln|y+1|\right]_0^1$$

$$= -\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}.$$

Ex8 D délimité par $x=0$, $y=x+2$, $y=-x$

D compact et (x-y) fct continue. donc Fubini



$$F = \iint_D (x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^0\left(\int_{-x}^{x+2} (x-y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{-x}^{x+2} = \int_{-1}^0 x(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$= \int_{-1}^0 2x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 2 + \cancel{x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^0 = +\frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

Ex9 $I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{-x}\sin(2xy)\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-x}}{2x}\cos(2xy)\right]_0^1$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-x}}{2x}\left(\cos(2x) - 1\right)dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\sin^2 x\,dx$$

D'autre part voyons qu'on peut appliquer Fubini :

on calcule $J = \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin(2xy)|\,dx\,dy$

$= \int_0^1\int_0^{+\infty}$ et $e^{-x}|\sin(2xy)| \leq e^{-x}$

et $\int_0^1\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,dy = \int 1\,dy = 1.$ donc

$|e^{-x}\sin(2xy)|$ intégrable. On applique Fubini

$$I = \int_0^1\underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(2xy)\,dx\right)}_{A}dy$$

$dv = e^{-x}$ $v = -e^{-x}$

$u = \sin 2xy$ $du = 2y\cos 2xy$

$$I = \int_0^1 \left(\left[\cancel{2x} e^{-x} \sin(2xy) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2y e^{-x} \cos(2xy)\, dx \right) dy.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{+\infty} -2y e^{-x} \cos(2xy)\, dx\, dy \qquad u = \cos 2xy \quad du = -2y \sin 2xy$$
$$dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$$

$$= \int_0^1 \left(y\left[\cos(2xy)\, e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} 4y^2 \sin(2xy)\, e^{-x}\, dx \right) y$$

$$= \int_0^1 \left(-2y + 4y^2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(2xy)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2y}{4y^2-1}\, dy. \qquad A = -2y + 4y^2 A$$
$$A(4y^2-1) = 2y.$$

$$= \left[\frac{1}{4} \ln |4y^2 - 1| \right]_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin^2 x = \frac{1}{4} \ln 3$

EX10 – 1. $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx.$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}.$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ se prolonge par cont en une fct continue.

~~on calcule~~ $\cancel{\displaystyle\lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{2\ln x}{x^2-1}\, dx \quad u = \ln x \quad dv =}$

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2-1} \qquad u = \frac{1}{x} \qquad du = -\frac{1}{x^2} dx$$
$$\ln x = -\ln u$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx + \int_1^0 \frac{\ln u}{1-u^2}\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx + \int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1}\, du = 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}$$

2 – $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{dx\, dy}{(1+y)(1+x^2 y)}$ $\qquad f(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ fct à val. positive donc app. Fub.T

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+y)} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{dx}{1+x^2y} \right) dy = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} \left[\arctan(\sqrt{y}x) \right]_0^{+\infty} dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \int \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy \qquad u = \sqrt{y} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \int \frac{2}{1+u^2}\, du = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2} du = \pi \left[\arctan u \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{1/1-x^2}{1+y} + \frac{x^2/x^2-1}{1+x^2y} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1-x^2} \ln \left| \frac{1+y}{1+x^2y} \right| \right]_0^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln \frac{1}{x^2}}{(1-x^2)}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln x}{x^2-1}\, dx$$

$$2I = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}$$

3 – $\frac{\pi^2}{4} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}$

et $\frac{\ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n}\ln x$ d'où $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n}\ln x$

$x \in]0,1[$

puisque $-x^{2n}\ln x$ est positif pour $x \in]0,1[$ par conv monotone,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -x^{2n}\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 -x^{2n}\ln x \, dx$$

et $\int_0^1 -x^{2n}\ln x \, dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

EXII – $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx} \, dx$

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-tx} \, dx$

1)

TD6
cours

Théorème Fubini $f : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}$ borélienne $\forall$

$|f|$ intégrable. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^{m+p}} f \, d\lambda_{m+p} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_p(y) \right) d\lambda_m(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \, d\lambda_m(x) \right) d\lambda_p(y)$$

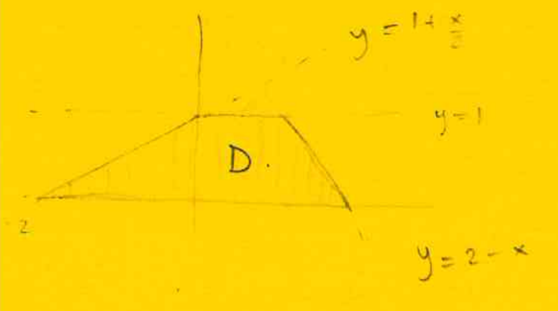
idée preuve :

- comb. lin. finie de fct ayant propr a la prop
- suite croiss ~~pp~~ de fct ayant prop alors conv. pp. lim a la prop
- fct indicatrice de parties de mesure finie

→ toute fct int est lim fct "étagée" = comb lin f de fct ind sur parties mesurables de mesure finie

1 cas particulier : fonct continue sur rectangle $[a,b] \times [c,d]$
faire preuve

exemples . $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (exo 2) délimité par $y=0$, $y=1$, $y = 2-x$, $y = 1+\frac{x}{2}$
Calculer $\iint_D f(x,y) \, dx dy$



$f(x,y) = xy$

. La fct $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$!

. D est fermé comme intersection de 3 fermés

$\{(x,y),\ y \geq 0\} = f_1^{-1}([0,+\infty[)$ $f_1(x,y) = y$ (cont)

$\{(x,y),\ y \leq 1\} = f_1^{-1}(]-\infty,1])$

$\{(x,y),\ y \leq 2-x\} = f_2^{-1}(]-\infty,0])$ $f_2(x,y) = y+x-2$

$\{(x,y),\ y \leq 1+\frac{x}{2}\} = f_3^{-1}(]-\infty,0])$ $f_3(x,y) = y-\frac{x}{2}-1$

. D borné car $D \subseteq [-2,2]^2$

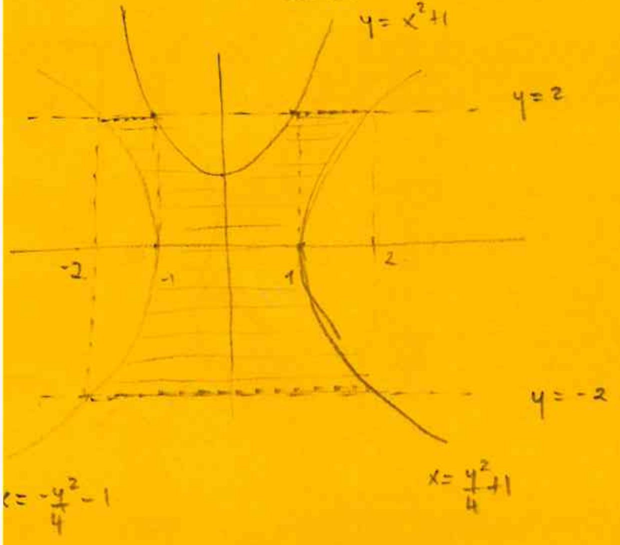
Puisque $f(x,y)$ continue alors $\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{1}_D f(x,y)| \, d\lambda_2 = \int_D |f(x,y)| \, d\lambda_2$ finie

Par Fubini $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D f(x,y) \, d\lambda_2 = \int_0^1 \left(\int_{2(y-1)}^{2-y} xy \, dx \right) dy = \frac{7}{24}$

exemple 2 : $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |y| \leq 2, \ |x| \leq \frac{y^2}{4} + 1, \ y \leq x^2+1 \}$

exo 6

Calculer l'aire de D.



$x = \frac{y^2}{4}+1$ parabole

$x = -\frac{y^2}{4} - 1$

on veut calculer $\iint_D 1 \, dx dy$

1) D fermé (inters de fermés)

D borné $\subseteq [-2,2]^2$

donc D compact

fct 1 continue donc intég sur D

2) $$\iint_D 1 dx dy = 4 \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{y^2}{4}+1} dx \right) dy - \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2+1}^{2} 1 \, dy \right) dx = \frac{28}{3}$$

exemple 3 : $I = \int_D (e^{-x} \sin 2xy) \, d\lambda_2$ $\qquad D = [0, +\infty[\times [0,1]$

exo 9

$f(x,y) = e^{-x} \sin(2xy) \qquad f : D \to \mathbb{R}$

Voyons $|f|$ intégrable . Puisque $|f|$ à valeurs positives

par Fubini - Tonelli $\quad J = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 |f(x,y)| dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(x,y)| dx \right) dy$

$\forall y \in [0,1] \quad |f(x,y)| \leq e^{-x}$ d'où $\int_0^{+\infty} |f(x,y)| dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

et donc $J \leq \int_0^1 1 \, dy = 1$ donc $J < +\infty$

On peut donc appliquer Fubini à $f(x,y)$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx \right) dy$$

$u = \sin 2xy \qquad du = 2y \cos 2xy \, dx$

$dv = e^{-x} dx \qquad v = -e^{-x}$

Soit $A = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx = \left[-e^{-x} \sin 2xy \right]_0^{+\infty} + 2y \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos 2xy \, dx$

$= 0 + 2y \left(\left[-e^{-x} \cos 2xy \right]_0^{+\infty} - 2y \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2xy \, dx \right)$

$u = \cos 2xy \qquad du = -2y \sin 2xy$

$dv = e^{-x} \qquad v = -e^{-x}$

d'où $A = 2y - 4y^2 A$ on a donc $A = \dfrac{2y}{1+4y^2}$

on a donc $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\,dy = \left[\frac{1}{4}\ln(1+4y^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 5}{4}$

D'autre part $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 e^{-x}\sin 2xy\,dy\right)dx$

$$= \int_0^{+\infty}\left[-\frac{e^{-x}\cos 2xy}{2x}\right]_0^1 dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{2x}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\sin^2 x}{x}\,dx \qquad \square$$

EX II - 1) $\quad g(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx. \qquad$ or $\quad \dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos xy\,dy.$

soit $t>0$ $\quad$ on considère $\quad h_t(x,y) = \cos xy\, e^{-tx}.$

et $D = [0,+\infty[\times[0,1]$. On a $|h_t(x,y)| \leq e^{-tx}$

et $\displaystyle\int_D e^{-tx}\,d\lambda_2 = \int_0^1\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx\,dy$ $\quad$ par Fub-Ton

$$= \int_0^1\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^{+\infty}dy = \int_0^1 \frac{1}{t}\,dy = \frac{1}{t} < +\infty$$ donc $|h_t(x,y)|$

intégrable et par Fubini $\quad \displaystyle\int_D h_t(x,y) = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \cos xy\, e^{-tx}\,dy\,dx = g(t)$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{+\infty}\cos xy\, e^{-tx}\,dx\right)dy.$$

on calcule $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\cos xy\, e^{-tx}\,dy$ $\quad$ on fait IPP 2 fois et on obtient

$= \dfrac{t}{y^2+t^2}$ $\quad$ d'où $\quad g(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{y}{t}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dy$

$$= \left[\arctan\frac{y}{t}\right]_0^1$$

$$= \arctan\frac{1}{t}$$

2) $\quad f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$

on sait $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin 2xy}{x}\,dy.$ $\quad$ On pose pour $t>0$,

$h_t(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2xy}{x}e^{-tx} & (x,y)\neq(0,0). \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$ $\quad h_t(x,y)$ continue sur $[0,+\infty[\times[0,1]$

et $|h_t(x,y)| \leq 2y e^{-tx}$ et qui est fct positive par Fub-Tonelli

$$\iint |h_t(x,y)| \leq \iint 2y e^{-tx} = \int_0^1\int_0^{+\infty} 2y\, e^{-tx}\,dx\,dy = \int_0^1 2y\left[-\frac{1}{t}e^{-tx}\right]_0^{+\infty}dy$$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{2y}{t}\,dy = \frac{2}{t} < +\infty$ donc $|h_t(x,y)|$ intégrable par Fubini .

Feuille d'exercices VII.

Changement de variables

Exercice 1. Soit D le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan. Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Exercice 2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2)^2 < xy\}$. Calculer $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$.

Exercice 3. Soient $0 < a < b, 0 < c < d$, et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax^2 < y < bx^2, c < xy < d\}$. Calculer l'aire de D.
(Indication : poser $u = \frac{y}{x^2}$ et $v = xy$.)

Exercice 4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - 2x < 0, x^2 - 2y < 0\}$. Calculer $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\,dx\,dy$.
(Indication : poser $x = u^2v$ et $y = uv^2$)

Exercice 5. On pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Calculer $J = \iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ en fonction de I. Calculer J en utilisant les coordonnées polaires. En déduire la valeur de I.

Exercice 6. Justifier que l'intégrale $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$, où $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x^2+y^2) < 9\}$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 7. Calculer l'intégrale $\iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$.

Exercice 8. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < x^2+y^2 < 1\}$.
Justifier que l'intégrale $\iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 9. Soit $\psi : U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

1. Représenter graphiquement le point $p = \psi(r,\theta,\varphi)$ pour un triplet (r,θ,φ) fixé. On appelle (r,θ,φ) les coordonnées sphériques du point p.
2. Déterminer $\psi(U)$.
3. Montrer que ψ est injective.
4. Calculer $J_\psi(r,\theta,\varphi)$ pour tout $(r,\theta,\varphi) \in U$ et en déduire que ψ est un C^1-difféomorphisme de U sur $\psi(U)$.
5. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume d'une boule de rayon R.
6. Soient 3 réels a, b et c strictement positifs. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Exercice 10. À l'aide du changement de variables $x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uw}, z = \sqrt{uv}$, calculer le volume des domaines suivants :
- $D_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0 \text{ et } uv, uw, vw < 1\}$,
- $D_2 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon u,v,w > 0 \text{ et } uv + uw + vw < 1\}$.

TD 7 – Changement de variables

EX1 D = disque centre $(0,1)$ rayon 1

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$\varphi : U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

c'est un difféom. de $U \rightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus [0,+\infty[\times \{0\}$

$\varphi^{-1}(D)$: D : $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$
$r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 1)^2 \leq 1$
$r^2 - 2r\sin\theta \leq 0$
$r(r - 2\sin\theta) \leq 0$. De plus $\sin\theta > 0$.

$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta),\ \theta \in]0,\pi[,\ 0 < r < 2\sin\theta\}$

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,d\theta = 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\,d\theta = \left[\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \pi + \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

EX2 : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2+y^2)^2 < xy\}$

$$I = \iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$(x^2+y^2)^2 < xy$
$\Leftrightarrow r^4 < r^2\cos\theta\sin\theta$
$\Leftrightarrow \boxed{r^2 < \cos\theta\sin\theta}$

Il faut calculer $\varphi^{-1}(D)$: $r^2 < \cos\theta\sin\theta$ a un sens si $\cos\theta\sin\theta > 0$.

$\varphi^{-1}(D) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ \theta \in \underbrace{]0,\tfrac{\pi}{2}] \cup [\pi, \tfrac{3\pi}{2}]}_{J},\ 0 < r < \sqrt{\cos\theta\sin\theta}\}$

$$I = \int_{\theta\in J}\int_{r=0}^{r=\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} r^2\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta\in J}\frac{1}{3}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta.$$

5.3 Théorème de changement de variables

rappels : · homéomorphisme $f : X \to Y$ espaces métriques
ssi f bijection et f et f^{-1} sont continues

(~~en réalité seulement le~~ si X, Y compacts f conti et bij $\Rightarrow f^{-1}$ continue donc homéomor.)

· jacobienne de $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert
est la matrice

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

· si φ linéaire $J\varphi = \underset{can}{\mathrm{Mat}}(\varphi)$

Théorème d'inversion globale $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouv. $\mathcal{C}^1$

si φ injective et $\det J\varphi(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow \varphi(U)$ ouvert et φ difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$

Théo de Chang de variables : U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$ $\varphi : U \to V$ diff de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

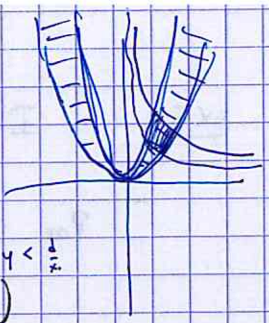
1) $\forall B \subseteq U$ (borélienne) $\lambda_n(\varphi(B)) = \int_B |\det(J\varphi(x))| \, d\lambda_n(x)$

2) $f : V \to [0, +\infty[$ (borélienne) $\int_V f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_U f \circ \varphi(y) \, |\det J\varphi(y)| \, d\lambda_n(y)$

3) $f : V \to \mathbb{R}$ intégrable alors $y \mapsto f \circ \varphi(y) \, |\det J\varphi(y)|$ intégrable sur U

et $$\int_V f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_U f \circ \varphi(y) \, |\det(J\varphi(y))| \, d\lambda_n(y)$$

$0 < a < b$, $0 < c, d$.



Ex3 - $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ax^2 < y < bx^2,\ c < xy < d\}$

on remarque si $x,y \in D$ alors $x,y > 0$.

on pose $u = \frac{y}{x^2}$, $v = xy$. $\quad xy < d$. $\quad y < \frac{d}{x}$

$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\}\times\mathbb{R} \cup \mathbb{R}\times\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (u = \frac{y}{x^2}, v = xy)$

$J\phi = \left(\cancel{\begin{matrix} -\frac{2y}{x^3} \\ y \end{matrix}} \right)$ on a donc $x = \sqrt[3]{\frac{v}{u}}$ $\quad y = \sqrt[3]{uv^2}$

on pose $\varphi :]a,b[\times]c,d[\longrightarrow D$

$(u,v) \longmapsto (x = v^{1/3}u^{-1/3},\ y = u^{1/3}v^{2/3})$.

on calcule $J\varphi = \left(\dots \right) = -\frac{1}{3u} \neq 0$.

De plus on a bien φ injective car $\sqrt[3]{\ }$ inj et

si $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$ et $u_1 v_1^2 = u_2 v_2^2 \Rightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2$

$\Rightarrow \varphi$ difféomorph. classe C^1

$$\int_D dxdy = \iint_{a\ c}^{b\ d} |\det J\varphi|\, dudv = \int_a^b\int_c^d \frac{1}{3}u\, dvdu$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(d} \ \frac{1}{3}\int_a^b (d-c)u\, du = \frac{1}{6}(b^2-a^2)(d-c)$$

Ex4 $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2 - 2x < 0,\ x^2 - 2y < 0\}$. on veut calculer

$I = \iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dxdy$. on pose $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\}\times\mathbb{R} \cup \mathbb{R}\times\{0\}) \to \mathbb{R}^2$

$(u,v) \mapsto (x = u^2 v, y = uv^2)$

$J\varphi = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$ $\quad \det J\varphi = 3u^2v^2 \neq 0$

De plus φ injective : $u_1^2 v_1 = u_2^2 v_2$ et $u_1 v_1^2 = u_2 v_2^2$

on en déduit $u_1^3 = u_2^3 \Rightarrow u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$

Donc d'après le théo. φ est un difféomorph. de classe C^1

Calculons $\phi^{-1}(D) = U$

$\begin{cases} y^2 - 2x < 0 \\ x^2 - 2y < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(u^3-2) < 0 \\ v(v^3-2) < 0 \end{cases} \iff \{(u,v) \in (]-\infty,-\sqrt{2}[\ \cup\ ]0,\sqrt{2}[)^2$

De plus $f(x,y)$ à v. positive donc par théo chang. v.

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\, dxdy = \iint_U 3e^{u^3+v^3}u^2v^2\, dudv$$

$$= \cancel{\iint_U v^2 e^{u^3+v^3}} \ \frac{2}{3}\cosh(4\sqrt{2}) - \frac{4}{3}\cosh(2\sqrt{2}) + \frac{2}{3}$$

EX5 — $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, $J = \iint_{]0,+\infty[^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.

Par Fubini-Tonelli $J = \int_{]0,+\infty[} e^{-x^2}\left(\int_{]0,+\infty[} e^{-y^2}\,dy\right)dx$.

$= I \int_{]0,+\infty[} e^{-x^2}\,dx = I^2$.

Calculons J. $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$\varphi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ difféom de classe C^1

$\varphi^{-1}\left(]0,+\infty[^2\right) =]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[$

$J = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} e^{-r^2}\,r\,drd\theta$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} e^{-r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{4}\left[e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$

d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EX6 — $I = \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,dxdy$ $\quad B = \{(x,y),\ x^2+y^2 < 9\}$.

$\varphi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\varphi^{-1}(B) =]0,3[\times]0,2\pi[$.

$f(x,y)$ à valeurs ds $[0,+\infty]$ donc

$I = \iint_{\varphi^{-1}(B)} \frac{1}{r^{4/3}}\,r\,drd\theta = \int_0^3\int_0^{2\pi} r^{-1/3}\,d\theta dr = 2\pi\left[\frac{3}{2}r^{2/3}\right]_0^3$

$= \pi\, 3^{5/3}$

EX7 — $I = \iiint_D \frac{z}{x^2+y^2}\,dxdydz$ $\quad D = \{(x,y,z),\ 1 < x^2+y^2 < z^2 < 4\}$

$\varphi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$(r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

coord. cylindriques difféom classe C^1

$x^2+y^2 = z^2 \Leftrightarrow r^2 = z^2 \Leftrightarrow r = z$ $\quad \cancel{-4 < z < 1 \text{ et } 1 < r}$

$1 < r^2 < z^2 < 4$

$\cancel{\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta,z),\ 1 < |z| < 2,\ 0 < \theta < 2\pi,\ r\}}$

ceci implique $1 < r < 2$ et
z tq $r < z < 2$ ou $-2 < z < -r$

$\varphi^{-1}(D) = \{(r,\theta,z),\ 1 < r < 2,\ 0 < \theta < 2\pi,\ r < z < 2 \text{ ou } -2 < z < -r\}$

$J\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det J\varphi = r$

on intègre sur l'union de 2 régions

$$I = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_r^2 \frac{z}{r}\,dz\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{-2}^{-r} \frac{z}{r}\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \iint \left[\frac{z^2}{2r}\right]_r^2 dr\,d\theta + \iint \left[\frac{z^2}{2r}\right]_{-2}^{r} dr\,d\theta$$

$$= \iint \left(\frac{4}{2r} - \frac{r}{2}\right) dr\,d\theta + \iint \frac{r}{2} - \frac{4}{2r} = 0$$

domaine symétrique par rapport à $z = 0$.
et $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$ donc $I = 0$.

Ex 8 $\quad D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ 0 < z < x^2+y^2 < 1 \}$

φ coord cylindriques.

Calculs $\varphi^{-1}(D)$: $\quad 0 < z < r < 1$.

$\varphi^{-1}(D) = \{ (r,\theta,z), \ 0 < \theta < 2\pi, \ 0 < z < 1, \ z < r < 1 \}$.

$I = \iiint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad \ln(x^2+y^2) < 0.$

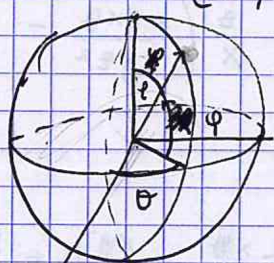
$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_z^1 2(\ln r) r\,dr\,dz\,d\theta = \ldots$

Ex 9 : Coord sphériques

$\Psi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$ ($= U$)

$(r, \theta, \varphi) \longmapsto (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)$

1)



2) $\Psi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R})$ demi-plan $y=0$ avec $x>0$.

3) Ψ injective (utiliser coord. polaires)

4) $$J\Psi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\det J\Psi = r^2\cos\varphi$

5) Boule de rayon r : $V = \iiint_B dx\,dy\,dz \qquad B = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

6) $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ $\qquad E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \}$

~~Ψ : on doit calculer $\Psi^{-1}(E)$~~

On pose $X = \frac{x}{a} \quad Y = \frac{y}{b} \quad Z = \frac{z}{c}$ et

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (X,Y,Z) \longmapsto (aX, bY, cZ)$

c'est un C^1 difféomorphisme.

$$J\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & c \end{pmatrix} \qquad \det J\varphi = abc$$

et $\varphi^{-1}(E) =$ Boule de rayon 1.

$$V(E) = \iiint_{\varphi^{-1}(E)} abc \; dX\,dY\,dZ = abc \iiint_{B} dX\,dY\,dZ$$

$$= abc \, \frac{4\pi}{3}$$

<u>Ex 10</u> 1) $D_1 = \{(u,v,w),\ u,v,w > 0,\ uv, uw, vw < 1\}$.

on pose $x = \sqrt{vw}$ $y = \sqrt{uw}$ $z = \sqrt{uv}$

On en déduit $u = \frac{yz}{x}$, $v = \frac{xz}{y}$, $w = \frac{xy}{z}$.

$$\varphi : \mathbb{R}^{*}$$

$$(x,y,z) \longmapsto \left(\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}\right)$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y} & -\frac{xz}{y^2} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2} \end{pmatrix} \quad \cancel{\det}$$

$$\det J\varphi = -\frac{yz}{x^2}\left(\frac{x^2zy}{y^2z^2} - \frac{x^2}{zy}\right) - \frac{z}{x}\left(-\frac{zxy}{yz^2} - \frac{xy}{zy}\right)$$

$$+ \frac{y}{x}\left(\frac{xz}{yz} + \frac{xzy}{zy^2}\right)$$

$$= -\frac{yz}{x^2}\underbrace{\left(\frac{x^2}{yz} - \frac{x^2}{zy}\right)}_{0} - \frac{z}{x}\left(-\frac{x}{z} - \frac{x}{z}\right) + \frac{y}{x}\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\right)$$

$$= 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Vérifions l'injectivité