Feuille d'exercices IV.

Intégration, Théorèmes de convergence

Exercice 1. 1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \ln(2)$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 2. 1. Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Calculer $f(x)$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la suite $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n} dx$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n}) dx$.

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\lim_{n\to\infty} = e^x} e^{-2x} dx$.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n\, dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, dx$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.

2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$

3. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

-6. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 10. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.

2. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur $\mathbb{R}$ convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n\right) d\lambda.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ est semi-convergente.

2. Soit $k \geq 0$. Montrer que

$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin x}{x}dx \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue).

4. Une autre méthode pour montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue :

   (a) Par la même méthode que ci-dessus, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{cos(2x)}{x}dx$ est semi-convergente.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

   $$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x}.$$

   (c) En déduire que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (au sens de Lebesgue).

~~Chapitre 4 - TRIBUS ET MESURES~~

~~(on saute)~~

Chapitre 4 - Intégration, théorèmes de convergence

EX 2. 1) $t \in]0,+\infty[$ $\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$

~~par~~ on a $e^{-t} \in]0,1[$ si $t \in]0,+\infty[$.

et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \frac{1}{1-e^{-t}} = f(t). = \frac{e^t}{e^t - 1}$.

2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t} f(t)\, dt$

$= \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t e^{-(n+1)t} \right) dt$

rmq : int Lebesgue ⇒ int Riemann car cont par morceaux sur $]0,+\infty[$ à val positives.

puisque $te^{-(n+1)t} \geq 0$. pour $t \in]0,+\infty[$.

alors par conv monotone ~~[illegible]~~ $\quad I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} te^{-(n+1)t} dt$

int. par parties $\quad I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[-\frac{te^{-t(n+1)}}{n+1} \right]_0^{\infty} - \int \frac{e^{-t(n+1)}}{n+1} dt \right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-t(n+1)}}{(n+1)^2} \right]_0^{\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\sin t) e^{-t(n+1)} \right) dt$

$\frac{\sin t}{e^t - 1}$ cont sur $]0,+\infty[$ et int généralisé au sens de Riemann $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{e^t - 1} \right| dt \leq \int_0 \frac{1}{e^t - 1} dt$

puisque $|\sin t\, e^{-t(n+1)}| \leq te^{-t(n+1)}$ sur $]0,+\infty[$.

et $\sum \int te^{-t(n+1)} dt$ converge alors

$J = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-t(n+1)} dt$ $\quad$ parties 2 fois.

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

EX 3 1). $\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$ $\quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$.

fct continue sur l'intervalle $]0,1]$ donc intégrable. en 0 prolongé par cont si $\alpha < 0$. car lim = 0.

2) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$. la fonct $f_n(x) \geq 0$. pour $x \in [0,1]$

. pour x donné $\in [0,1]$ $(f_n(x))$ suite croissante

Par converg monotone.

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right) dx$.

$= \int_0^1 x^\alpha\, dx$

si $\alpha \neq -1$ on obt $\frac{1}{\alpha+1}$, $\alpha = -1$ la lim. n'existe pas

Ex 4 . $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ $\quad f_n(x) = (n+1)x^n$

1) $f_n \to 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[x^{n+1}\right]_0^1$

$= \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

d'où on n'a pas $\lim\limits_{n\to\infty}\int \ldots = \int \lim.$

Ex 5 . 1) $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. fonction définie partout sauf en $-\infty, +\infty$ mais ça vaut 0 donc int finie

$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\int_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \ldots$ où $\ldots dx \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty}$

d'où $f_n(x)$ intégrable.

2) $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$. conv. dominée $= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$

$\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2} = 0.$ (presque partout sauf sur ~~sauf~~ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ de mesure nulle.

Ex 6 $A = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{e^t}{1+t^n}\,dt$ $\quad \left|\dfrac{e^t}{1+t}\right| \leq e^t \quad \forall t \in [0,1]$.

et $\int_0^1 e^t\,dt = e < \infty$ par conv dominée

$A = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^t}{1+t^n} = \int_0^1 e^t\,dt = e.$

$B = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+x}\,dx.$ $\quad \left|\dfrac{e^{-nx}}{1+x}\right| \leq \dfrac{1}{1+x}$ et $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}\,dx = \ln 2$

par conv dominée $B = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{-nx}}{1+x}\right)dx = 0.$

$C = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{n}}\,dx.$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f_n(x))_n = \left(e^{-\frac{|x|}{n}}\right)_n.$

suite croissante

par conv monotone.

$C = \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{|x|}{n}} = \int_{\mathbb{R}} 1\,dx = +\infty.$

Ex 7 — $A = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$

$u = 1 - \frac{x}{n}$

$du = -\frac{1}{n} dx.$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^0 -n u^n du \right)$

$= \lim_{n\to\infty} \left. \frac{-n}{n+1} u^{n+1} \right|_1^0 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

ou on pose $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$
Soit $x \in \mathbb{R}_+$ alors pour n assez grand $x \in [0,n$
et $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$
$= \exp^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$
$f_n(x) \to e^{-x}$
et $0 \le f_n(x) \le e^{-x}$.
Puis $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} < +\infty$
donc par théo. conv. dominée échange lim, $\int$
et $A = \int e^{-x} = 1$

$B = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$

Soit $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} & \text{si } x \le n. \\ 0 & x \ge n. \end{cases}$

$B = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$

$\lim f_n$

On pose donc $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ $x \in \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ pour n assez grand $x \in [0,n[$ et

donc $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ puisque $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

On a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

Ex 8 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n\,dx$. $\quad |e^{-x}(\sin x)^n| \leq e^{-x}$.

et $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 < \infty$ par

conv dominée

$$A = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x)^n\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to\infty} e^{-x}(\sin x)^n\right)dx$$

et $\lim_{n\to\infty} e^{-x}(\sin x)^n = 0$ presque partout (sauf pour $x \in \frac{\pi}{2}\pi\mathbb{Z}$)

donc $A = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0$.

$$B = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\,dx.$$

on a $\sin\frac{x}{n} \leq \frac{x}{n}$.

(en effet : $f(x) = x - \sin x$. $x=0$ $f(x)=0$; $f'(x) = 1-\cos x \geq 0$ donc croissante $f(x) \geq 0$).

et donc $\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \leq \frac{n}{x^3}\frac{x}{n} = \frac{1}{x^2}$ pour $x \geq 1$.

~~par conv dominée~~ et $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$.

$$B = \int_1^{+\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\right)dx$$

$$B = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Ex 9 $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[\quad f_n(x) = n(1-x)^n\sin^2(nx)$

1) $f_n(x) \to 0$ si $x \neq 0$. (diverge lorsque $x=0$)

d'où $f_n(x) \to 0$ presque partout

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in\,]0,1] \\ +\infty & x = 0.\end{cases}$$

2) $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n(1-x)^n\sin^2(nx)\,dx$ on pose $X = nx$. $dX = n\,dx$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{X}{n}\right)^n \sin^2 X\,dX$$

3) $t \geq 0$ $\quad f(t) = e^{-t} + t - 1 \quad f(0) = 0$ et $f'(t) = -e^{-t} + 1 \geq 0$.

donc $f(t) \geq 0 \quad \forall\, t \geq 0$.

4) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin^2 x\,dx.$

on pose : $h_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \sin^2 x$ on a $h_n(x) \to e^{-x}\sin^2 x$

$|h_n(x)| \leq e^{-x}\sin x$ int pp $\int$ conv $= \frac{1}{2}$ conv dominée $\lim_{n\to\infty} \int \ldots = \frac{1}{2}$.

<u>EX10</u> $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$

1) $x > 0$ $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - 2e^{-2nx}.$

$= \sum e^{-nx} - \sum 2e^{-2nx}.$

$= \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{2}{1-e^{-2x}}.$

$=$ ~~[illegible]~~ $=$ ~~[illegible]~~

2) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{2}{1-e^{-2x}}\right) dx$

$=$ ~~[illegible]~~ décomp. rationelle ~~par~~ éléments simples.

puis

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{-nx} - 2e^{-2nx}\right) dx$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{e^{-nx}}{n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{\infty} = 0.$

<u>EX11</u> : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante fct positives int sur $\mathbb{R}$
$(f_n) \longrightarrow 0$ presque partout.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ conv. presque partout. $\Rightarrow$ f posit int sur $\mathbb{R}$

Critère séries alternées : $\forall x$, pp $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x) < +\infty$

donc on définit ainsi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(x) - f_{2k+1}(x)$

somme infinie termes positifs donc $f(x) \geq 0$

2) $\sum (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$ Notons $v_n = \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$.

alors · la suite v_n est décroissante

· $|f_n| \leq f_0$ int donc

par conv dominée $\lim \int f_n = \int 0 = 0$

d'où $(v_n) \longrightarrow 0$

· Donc la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge

i.e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$ converge

D'autre part si $h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(x)$

on a $\left|h_n(x)\right| \leq \left|f_0(x) - f_1(x) + \dots + (-1)^n f_n(x)\right| \leq f_0(x)$ qui est intégrable

donc par conv dominée

$$\int \lim h_n = \lim \int h_n \quad \text{i.e}$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n\right) dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int (-1)^k f_k = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n f_n$$

EX 12 : 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ on remarque d'abord

que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en $x=0$ intégrable sur $[0,1]$ car cont sur borné

par IPP $b \geq 1$. $\displaystyle\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ on peut donc regarder $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$

d'une part $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ d'où $\displaystyle -\int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{b}$

et $\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^b = \cos 1 - \frac{\cos b}{b}$

lorsque $b \to +\infty$ $\frac{\cos b}{b} \to 0$ et $1 - \frac{1}{b} \to 1$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx < +\infty$. et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} < +\infty$

2) $k > 0$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi} \frac{\sin x}{x} \geq \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| \Big]\dots$

$$\geq \frac{1}{2}\ln\left|\frac{5+12k}{1+12k}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{4}{1+12k}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\,\frac{4}{1+12k} \geq \frac{1}{3(1+2k)}$$

3) Si on regarde $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3(k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge}$$

donc f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue.

Feuille 4

exo 1 1) $x \in]0,1[$ $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$.

suite ~~de~~ fcts. à valeurs positives et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1-x}{1-x^2} \quad \text{(suite géométrique)}$$
$$= \frac{1}{1+x}.$$

La fct $\frac{1}{1+x}$ est continue sur $]0,1[$ ~~et~~ à v. positives

donc intégrale Riemann = int Lebesgue et $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$.

donc $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = \ln 2$

2). Par theo echange série et intégrale appl. à $f_n(x) \geq 0$.

on a $\ln 2 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

EXO 12 4). a) $\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}dx = \left[\frac{1}{2x}\sin 2x\right]_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\sin 2x}{x^2}dx$.

et $\lim_{b\to+\infty}[\quad] = 0$ et $\frac{1}{2}\int_1^b \frac{\sin 2x}{x^2}dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b \to 1$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx < +\infty$.

b) $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{(\sin x)^2}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$

c). si $\int \frac{1-\cos 2x}{2x}dx$ était finie, par ailleurs

$\int \frac{1-\cos 2x}{2x}dx + \int \frac{\cos 2x}{2x}dx < +\infty$ mais ceci =

à $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ diverge donc $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ diverge.

soit $a>0$. $t \in [0,a]$ $f(t)$ continue sur $[0,a]$

$t \geq 1$ $f(t)$ cont sur $[0,+\infty[$

$-tx \leq -x$

$e^{-tx} \leq e^{-x}$

2018/2019
Université Lyon I

Semestre d'automne - L3 MathEco
Topologie et théorie de la mesure

Feuille d'exercices V.

Intégrales à paramètres

Exercice 1. Pour $t \geq 0$, on pose $F(t) = \left(\int_0^t \exp(-x^2)\, dx \right)^2$ et $G(t) = \int_0^1 \frac{\exp(-t^2(1+x^2))}{1+x^2}\, dx$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $F'(t) + G'(t)$ pour $t \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{\infty} \exp(-x^2)\, dx$ puis de $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2)\, dx$.

Exercice 2. 1. Soit $I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-x^2}\, dx$, pour $t \in \mathbb{R}$. Prouver que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(t)$ pour tout réel t $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Exercice 3. Pour $t \geq 0$, on pose $\varphi(t) = \int_0^1 e^{-t/x}\, dx$.
Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que $\varphi''(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ pour $t > 0$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.
4. Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ (pour la deuxième intégrale, on pourra penser à utiliser la relation $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ et une intégration par parties).

$t \geq 1$ $e^{-tx} \leq e^{-x}$

$-t \leq 0$

$e^{-tx} \leq e^{\cdots}$

$\lim f'(t) = c$

$\lim \int \cdots = \int \lim = 0$

Exercice 5. 1. On fixe un réel t. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln(x)}\,dx$ converge si et seulement si $t > 2$. Dans la suite de l'exercice, on pose $F(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln(x)}\,dx$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]2, +\infty[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.
3. Déterminer la limite de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 2$ et ne faisant pas intervenir d'intégrale.

ex 90

Exercice 6. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

ex 94

Exercice 7. On pose pour $t \geq 0$: $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2+x^2)}{1+x^2}\,dx$. Montrer que la fonction f est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.
Calculer explicitement f' et en déduire f (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/x$).

Exercice 8. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx$ et $G(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
2. Etablir l'égalité valable pour tout réel t :

$$F(0) - F(t) + G(t) = C|t|, \text{ où } C = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx.$$

3a. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(t) = F(t)$ pour tout réel t.

3b. En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.

3c. En déduire l'expression de $F(t)$ pour $t > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(t)$ pour tout réel t.

4. Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

EX 1 $t \geq 0$ $\quad F(t) = \left(\int_0^t \exp(-x^2)\,dx \right)^2$

1)a) * soit $H(t) = \int_0^t \exp(-x^2)\,dx$ par théo fond. calcul intégral

$H(t)$ dérivable sur $[0,+\infty[$ et $H'(t) = e^{-t^2}$ qui est continue sur $[0,+\infty[$

donc $H(t)$ de classe C^1 aussi et même $\mathcal{C}^1$

$F(t) = H^2(t)$, $F'(t) = 2H(t)H'(t)$. et $\mathcal{C}^1$

* on pose $g(x,t) : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad a > 0$

$(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$

$\forall x \in [0,1]$ $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{-2t(1+x^2)}{1+x^2} e^{-t^2(1+x^2)}$ continue sur $[0,a]$

donc $t \mapsto g(x,t)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ $\forall x \in [0,1]$

. la fct $x \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ car cont sur compact donc bornée

. $\left| \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right| \leq M$ $\quad \forall x \in [0,a]$ $\forall t \in [0,1]$ car continue sur un compact

. Vecteur $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ bornée sur $[0,1]$ (car continue) donc

Alors $G : [0,a] \to \mathbb{R}$ bien déf sur $[0,a]$, dérivable sur $[0,a]$

$t \mapsto \int_{[0,1]} g(x,t)\,dx$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$

et $G'(t) = \int_0^1 -2t\, e^{-t^2(1+x^2)}\,dx$

b) $A = F'(t) + G'(t) = 2H(t)H'(t) + G'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx + \int_0^1 -2t\, e^{-t^2(1+x^2)}\,dx$

$= 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx + 2\int_0^1 t e^{-t^2} e^{-(tx)^2}\,dx$

on pose $u = tx$, $du = t\,dx$ $\quad A = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx - 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-u^2}\,du = 0$

2) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\quad$ On sait $(F+G)'(t) = 0$ d'où $F+G = \text{cste}$,

on évalue en $t=0$ $\quad F(0)=0$ et $G(0) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4}$

$I = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x^2}\,dx$ $\quad$ calculons $\lim_{t\to+\infty} G(t)$: $\left| \dfrac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \right| \leq e^{-(1+x^2)}$ fct cont sur compact bornée

par $= \int_0^1 \lim_{t\to\infty} \dfrac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$ par conv dominée $= \int_0^1 0\,dx = 0$

d'où $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \dfrac{\pi}{4}$ on en déduit $I^2 = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \dfrac{\pi}{4}$ et donc

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$ $\quad u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $du = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$ $\quad J = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 2\sqrt{2}\, I$

$= \sqrt{2\pi}$ ∎

Ex 2. 1) $I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-x^2} dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Soit $a > 0$ on considère l'intervalle $C = [-a, a]$

- $\forall t \in C$, $x \mapsto \cos(2xt) e^{-x^2}$ intégrable car $|\cos(2xt) e^{-x^2}| \leq e^{-x^2}$ qui est intégrable par l'exo 1 sur $[0, +\infty[$. Elle est aussi borélienne.
- $\forall x \in [0, +\infty[$ $\quad t \mapsto \cos(2xt) e^{-x^2}$ dérivable sur C sa dérivée est $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -2x \sin(2xt) e^{-x^2}$
- qui est de plus continue sur C.
- ~~…~~, $\forall t \in C$, $\forall x \in [0, +\infty[$,

$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| = |x \sin(2xt) e^{-x^2}| \leq x e^{-x^2}$ et

$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ donc par théo. dériv. int à param.

$I(t)$ bien dif sur C, de classe $\mathcal{C}^1$ sur C $\quad (\forall a > 0)$

donc " $\mathbb{R}$ ——— $\mathbb{R}$.

et $I'(t) = \int_{[0,+\infty[} -2x \sin(2xt) e^{-x^2} dx$

2) IPP sur $I(t)$: $\quad u = e^{-x^2}$ $\quad du = -2x e^{-x^2}$

$dv = \cos 2xt$ $\quad v = \frac{1}{2t} \sin 2xt$

$I(t) = \left[-\frac{e^{x^2} \sin 2xt}{2t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2t}\int 2x e^{-x^2} \sin 2xt\, dx$

$= \frac{1}{2t} I'(t)$. pour $t \neq 0$.

3) On résout l'éq diff pour $t \neq 0$.

$2t\, I(t) - I'(t) = 0$.

$I(t) = \lambda e^{t^2}$ et $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. d'où $\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

et $I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t^2}$. Pour $t = 0$ on a trouvé le même résultat pour $I(0)$.

EX3: $t \geq 0$ $\qquad \varphi(t) = \int_0^1 e^{-\frac{t}{x}} dx$

soit $b > a > 0$ $\qquad I = [a,b]$ $\qquad f(x,t) : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto e^{-t/x}$

- Si $t=0$. $\varphi(t) = 1$. $\varphi'(t) = 0$.
- $\forall t \in [a,b]$ $\qquad x \mapsto e^{-\frac{t}{x}}$ continue donc borélienne sur $]0,1]$.
  Si $x \to 0$ $\quad e^{-\frac{t}{x}} \to 0$
  donc on peut la prolonger par continuité en une fct cont sur $[0,1]$.
- $\forall t \in [a,b]$. $\qquad x \mapsto e^{-\frac{t}{x}}$ intégrable sur $[0,1]$.
  car $\left| e^{-\frac{t}{x}} \right| \leq 1$ $\quad$ int. sur $[0,1]$.
- $\forall$ pp $t \in [a,b]$ $\qquad t \mapsto e^{-\frac{t}{x}}$ dérivable sur $[a,b]$, sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$ est continue sur $[a,b]$

pour pp. x

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| = \left| \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{x} \right| = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{x} \leq \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x}$$

fct continue sur $]0,1]$. Si $x \to 0$. $\frac{e^{-a/x}}{x} \to 0$.

donc prolong. par cont à une fct cont. donc intégrable sur intervalle borné $[0,1]$ est finie.

Alors pour $t > 0$ $\qquad \varphi'(t) = \int_0^1 -\frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}} dx$.

- $\forall t \in [a,b]$, $\quad x \mapsto -\frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$ borélienne, intégrable sur $[0,1]$ (on prol. par cont.)
- $\forall$ pp $x \in [0,1]$ $\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{t}{x}}$. cont sur $[a,b]$ pour pt. x

$$\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,t) \right| = \left| \frac{1}{x^2} e^{-\frac{t}{x}} \right| \leq \frac{1}{x^2} e^{-\frac{a}{x}}$$

cont (en prol. par cont en $x=0$) donc intégrable sur int. fermé

On a donc $\varphi''(t)$ bien déf sur $[a,b]$ donc sur $]0,+\infty[$ dérivable et continue

et $\qquad \varphi''(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{t}{x}} dx$

$$= \left[\frac{1}{t} e^{-\frac{t}{x}} \right]_0^1 = \frac{e^{-t}}{t}. \qquad \square$$

Ex4 : $\cancel{x}\, t \geq 0$, $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$.

Soit $b > a > 0$.

1) . $\forall t \in [a,b]$, $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}$ borélienne car continue sur $]0,+\infty[$ et on prol. par cont en $x=0$

. $\forall$ pp x $\quad t \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}$ continue sur $[a,b]$

$\forall$ pp x $\quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{\sin^2 x}{x} e^{-tx}$ existe

. $\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\right| \leq e^{-ax}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\triangle$ $\to$ Faire mieux : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq g(x)$ où $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{x^2} & x \in [1,+\infty[\end{cases}$

et $g(x)$ intégrable. donc $f(t)$ continue sur $[a,b]$ donc sur $]0,+\infty[$

$\hookrightarrow$ mieux : continue sur $[0,+\infty[$

. $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq e^{-ax}$ int. sur $[0,+\infty[$

donc $f'(t)$ ~~existe~~ bien dif sur $[a,b]$ et

donc $\forall t > 0$ $\quad f'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin^2 x}{x} e^{-tx}\, dx$.

. $x \longmapsto -\frac{\sin^2 x}{x} e^{-tx}$ borélienne ~~...~~ (prol. par cont) en fct cont.

intégrable $\forall t \in [a,b]$ sur $[0,+\infty[$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = \sin^2 x\, e^{-tx}$ bien déf $\forall$ pp x sur $[a,b]$

et $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right| \leq e^{-ax}$ intégrable sur $[0,+\infty[$

d'où $f''(t)$ bien déf et $f''(t) = \int_0^{+\infty} \sin^2 x\, e^{-tx}\, dx$.

2) $f''(t) = \int_0^{+\infty} \sin^2 x\, e^{-tx}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) e^{-tx}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{-tx} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, e^{-tx} dx$

et $\frac{1}{2}\int \cos 2x\, e^{-tx}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t}\int_0^{+\infty} \sin 2x\, e^{-tx}\, dx\right)$

$= \frac{1}{2t} - \frac{1}{t}\left(\left[\frac{-\sin x\, e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{t}\int_0^{+\infty} \cos 2x\, e^{-tx}\, dx\right)$

$= \frac{1}{2t} - \frac{2}{t^2}\int_0^{+\infty} \cos 2x\, e^{-tx}\, dx$

donc $\int \cos 2x\, e^{-tx} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{t^2}\right) = \frac{1}{2t}$.

$\int \cos 2x\, e^{-tx} = \frac{t}{t^2+4}$

d'où $f''(t) = \frac{1}{2t} - \frac{t}{t^2+4}$.

On veut calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$. Supposons donc $t > 0$ et on considère

$n \geq 1$ $\quad f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-nx}$ $\quad$ ~~nest~~ évidemment pour p.p. $x \in [0, +\infty[$

$|f_n(x)| \leq e^{-x}$. intégrable sur $[0, +\infty[$ par conv. dominée

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 0\,dx = 0.$$

d'où $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

ou simplement $0 \leq f(t) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$

~~Idem pour $f'(t)$ on trouve $\lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0$.~~

3) Puisque $f''(t) = \frac{1}{2t} - \cancel{\frac{1}{4}\frac{t}{(\frac{t}{2})^2+4}} - \frac{t}{t^2+4}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\ln|\cancel{2}t| - \cancel{\tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{t}{2}\right)} + c$$

$$- \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + c$$

On calcule ensuite $f(t) = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{4}t\ln(t^2+4) - \arctan\frac{t}{2} + ct + c'$

$$= -\frac{1}{4}t\ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right) + c'' - \arctan\frac{t}{2} + ct$$

on fait $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et on a donc

$$\lim_{t\to+\infty} 0 + c'' - \frac{\pi}{2} + ct = 0$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ et } c'' = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : $f(t) = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{4}t\ln(t^2+4) - \arctan\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}$.

4) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = f(0) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Chang var. $2u = x$, $2du = dx$ $\qquad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2u}{2u}\,du = \int_0^{+\infty} 2\frac{\sin u\cos u\,du}{u}$.

IPP : $v = \frac{1}{u}$ $\qquad dv = -\frac{1}{u^2}$.

$dw = 2\sin u\cos u$ $\qquad w = \sin^2 u$

$$I = \left[\frac{\sin^2 u}{u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

<u>Ex 5</u> - $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln x}\, dx$

1) $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^t \ln x}$ continue sur $]1, +\infty[$.

lorsque $x \to 1$ $\lim \dfrac{x-1}{x^t \ln x} = 1$ donc fct se prolonge par cont. en $x = 1$.

Intégrale de Bertrand : $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

ici $\beta = 1$ $\dfrac{x-1}{x^t} \sim \dfrac{1}{x^{t-1}}$ elle conv donc ssi $t - 1 > 1$ i.e $t > 2$.

2) $F(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln x}\, dx$ pour $t \in]2, +\infty[$

- $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^t \ln x}$ borélienne car continue sur $]1, +\infty[$ et prol par cont en $x=1$

- $\forall t > 2$ $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^t \ln x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (question 1)

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{x-1}{x^t \ln x}\right) = -\dfrac{(x-1)\cancel{\ln x}}{x^t \cancel{\ln x}} = -\dfrac{x-1}{x^t}$ bien déf pour tout $x \in [1, +\infty[$ $\forall t > 2$ et continue sur $[1, +\infty[$

- soit $I =]2, a]$
$\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{x-1}{x^t \ln x}\right)\right| = \dfrac{x-1}{x^t} \sim \dfrac{1}{x^{t-1}}$ qui est intégrable sur un voisinage de l'infini ssi $t-1 > 1$ i.e $t > 2$ ✓

on a donc F de classe C^1 et

$$F'(t) = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{t-1}} - \frac{1}{x^t}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{-t+2} x^{-t+2} - \frac{x^{-t+1}}{-t+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}$$
$(t>2)$

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x-1}{x^t \ln x} = 0$ on majore $\left|\dfrac{x-1}{x^t \ln x}\right| \leq \dfrac{1}{x^{t-1} \ln x}$ sur $]1, +\infty[$

on calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{t-1} \ln x}\, dx = \int_1^{\varepsilon} \frac{1}{x^t \ln x}\, dx + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^t \ln x} = \underset{\text{car prol. cont}}{\overset{M}{\text{fini}}} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^t \ln x}\, dx$

$\leq \cancel{\varepsilon} M + \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{x^t}\, dx = M + \left[\frac{x^{-t+1}}{-t+1}\right]_\varepsilon^{+\infty} \to M$.

Par conv dominée $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \int 0 = 0$.

4) $F(t) = \ln|t-2| - \ln|t-1| + C$ d'où $C = \lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 0$.

2) On a $I'(x) = \int_0^{+\infty} 2t e^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$

on fait int. par parties : ~~on vo~~ $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\, dt$

$u = e^{-t^2}$ $\quad du = -2t e^{-t^2}$

$dv = \cos 2xt$ $\quad v = \frac{1}{2x} \sin(2xt)$

d'où $I = \left[\frac{e^{-t^2}}{2x} \sin(2xt) \right]_0^{+\infty} + \int \frac{1}{x} t e^{-t^2} \sin 2xt$

$= \frac{1}{2x} \int 2 t e^{-t^2} \sin(2xt)\, dt$

$= \frac{1}{2x} I'$

donc $I - \frac{1}{2x} I' = 0$. i.e $I' - 2xI = 0$.

d'où $I(x) = \lambda e^{x^2}$ et $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

donc $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$

<u>EX3</u> : $x \geq 0$ $\quad \varphi(x) = \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}\, dt$

on pose $f(x,t) = e^{-\frac{x}{t}}$ $\quad f : [0,+\infty[\times [0,1] \to \mathbb{R}$

- $t \longmapsto f(x,t)$ (à x fixé).

  est intégrable sur $[0,1]$, en effet $t \mapsto e^{-\frac{x}{t}}$ continue sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0} e^{-\frac{x}{t}} = 0$

  donc on la prolonge par cont en un fct cont sur $[0,1]$. Elle est donc bornée sur $[0,1]$ et intégrable.

- $t \neq 0$, $x \longmapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à x.

  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}}$ qui est de plus continue $\forall x \in [0,+\infty[$.

- $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = \left| -\frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}} \right|$ on regarde sur $[a,b]$ $a \neq 0$. $\times [0,1]$

  alors $\frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}} \leq \frac{1}{t} e^{-\frac{a}{t}}$ ~~continue sur un compact~~ (en x) ~~donc bornée et int.~~

pour $a \neq 0$. $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{a}{t}} = 0$ donc par prolong. c'est une fct continue sur $[0,1]$ donc bornée par M $\int_0^1 M\,dt = M$ intégrable.

On en déduit par théo dériv (et cont) des int. à paramètres que φ est $\mathcal{C}^1$.

et $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{t} e^{-\frac{x}{t}}\, dt$

~~posons~~ ~~f(x,t)=~~ on refait précisément $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{t^2} e^{-\frac{x}{t}}$ cont $\forall x \in [0,+\infty[$

posons $[a,b] \subseteq]0,+\infty[$ on a sur $[a,b]\times[0,1]$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{t^2} e^{-\frac{a}{t}}$$

comme avant se prol. par cont en $t=0$ à 0 et donc comme fct cont sur un compact elle est bornée et intégrable.

On en déduit φ est $\mathcal{C}^2$ et

$$\varphi''(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{x}{t}}\, dt$$

on calcule cette intégrale $\varphi''(x) = \left[\dfrac{-1}{x} e^{-\frac{x}{t}}\right]_0^1$

$= -\dfrac{e^{-x}}{x}$ pour $x > 0$.

<u>Ex 8</u> $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt$ $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\, dt$

1) $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ $\quad f : [-a,a]\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

$g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}$ $\quad g : [-a,a]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

- $x \longmapsto \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ continue sur $[-a,a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$.

$\left|f(x,t)\right| = \left|\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ (elle vaut $\frac{\pi}{2}$)

Donc F est bien déf et continue sur $[-a,a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$ i.e cont sur $\mathbb{R}$.

- $x \longmapsto g(x,t)$ continue sur $[-a,a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$. On utilise

$\sin t \leq t$
$\int_0^u \sin t \leq \int_0^u t\,dt$
$-\cos u + 1 \leq \frac{u^2}{2}$

$\cancel{\left|\frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\right|}$ $\quad 1-\cos(xt) \leq \dfrac{(xt)^2}{2}$ (ceci résultat général)

et donc $\left|\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\right| \leq a^2 \dfrac{t^2}{2 t^2 \cdot (1+t^2)} = \dfrac{a^2}{2(1+t^2)}$ intégrable.

F, G bien déf cont et $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

et $G(0) = 0$.

2) $F(0) - F(x) + G(x) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} - \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt + \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$

$= \int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2} dt$

on utilise $1-\cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$.

si $x=0$ égalité vraie
on suppose $x \neq 0$ et $x > 0$
(sym).

$J = F(0) - F(x) + G(x) = \int_0^\infty 2\frac{\sin^2\left(\frac{xt}{2}\right)}{t^2} dt$

et on pose $u = \frac{xt}{2}$. $du = \frac{x}{2} dt = \frac{u}{t} dt$

et si $t \to 0$ $u \to 0$, $t \to +\infty$ $\frac{xt}{2} \to +\infty$

$t^2 = \left(\frac{2u}{x}\right)^2 = u^2$

$J = \int_0^\infty x^2 \frac{2\sin^2 u}{(2u)^2} \frac{2}{x} du = \int_0^\infty x \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$

si $x \le 0$ on a $-J$ donc g.f. $|x| \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} du$.

3) i) $x \longmapsto g(x,t)$ est dérivable et C^∞ sur $[-a,a]$ ... donc $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t\sin xt}{t^2(1+t^2)}\right| \le \frac{x}{1+t^2}$

qui est intégrable (d'où G est C^1 et $G'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) dt$.

$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2\cos xt}{t^2(1+t^2)}\right| \le \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

donc $G(x)$ est C^2 et $G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{t^2(1+t^2)} dt = F(x)$.

ii) $F(x) = F(0) + G(x) - C|x|$.

sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $F(x) = F(0) + G(x) - Cx$.

$F'(x) = G'(x) - C$

$F''(x) = G''(x) = F(x)$

c) On a donc l'éq. diff $F''(x) - F(x) = 0$.

poly $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

les solutions sont de la forme $F(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{x}$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

pour $x \geq 0$ puisque $e^{-x} \to 0$. et $e^x \to +\infty$ alors on a forcément $\beta = 0$. et donc $F(x) = \alpha e^{-x}$

puisque $-\frac{\pi}{2} \le F(x) \le \frac{\pi}{2}$). ~~F est pair~~ $F(0) = \frac{\pi}{2}$ donc on pose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

D'autre part F est pair on en déduit

$x<0$. $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{x}$ i.e

$$F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4). $F(0) - F(x) + G(x) = C|x|$.

$$C|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e^{-|x|} + G(x)$$

on ~~évalue en $x=1$~~

$$\cancel{C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-1} + \int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2(1+t^2)} dt}.$$

on dérive pour $x>0$.

$x>0$ $\quad G''(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ $\qquad G'(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} + \alpha.$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} + \alpha x + \beta.$$

$$G(0) = \frac{\pi}{2} + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{2}.$$

$$G(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} + \alpha x - \frac{\pi}{2}.$$

EX 6 – $\quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} dx \quad$ pour $\alpha \geq 0$.

1) Soit $\alpha \geq 0$ $\quad$ pour x suff. grand ($g\ x \geq b$). $\ln(1+\alpha x^2) \leq \sqrt{x}$.

et donc $\frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}$

On sépare intégrale. $\int_0^b + \int_b^{+\infty}$

majoré par cont sur interv. fini $\qquad$ majoré par $x^{-3/2}$. intégrable.

2) $0<a<b$ $\quad$ on regarde $\quad f(x,\alpha) : [0,+\infty[\times [a,b] \to \mathbb{R}$

$$(x,\alpha) \mapsto \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)} \quad \text{et donc} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \leq$$