Corrigé - Interrogation I

QUESTION DE COURS.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition d'une norme sur E.

   Une norme sur E est une application $\|\cdot\|: E \to [0,+\infty[$ qui satisfait :

   (a) $\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

   (b) $\forall x, y \in E \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que pour tous x et y éléments de E, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

Soit x et y deux éléments de E. Alors, $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. De même, $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$ et donc, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

EXERCICE 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On admet que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent deux normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
Ces deux normes sont-elles équivalentes ? Justifier.
Indication : on pourra considérer la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n \text{ pour } n \geq 0.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|P_n\|_1 = n+1$ et $\|P_n\|_\infty = 1$.
Si les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ étaient équivalentes, il existerait deux réels positifs m et M tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ m\|P\|_\infty \leq \|P\|_1 \leq M\|P\|_\infty.$$

Mais, en considérant un entier $n_0 > M$, on obtiendrait $\|P_{n_0}\|_1 = n_0+1 \leq M\|P_{n_0}\|_\infty = M$, ce qui est une contradiction. Ces normes ne sont donc pas équivalentes.

EXERCICE 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la partie

$$A = \{(x, \sin(x)) \colon x \in \mathbb{R}\}.$$

La partie A est-elle ouverte, est-elle fermée ? Justifier.

Montrons que A n'est pas ouverte : $(0,0) = (0, \sin(0)) \in A$ mais pour tout $r > 0$, l'élément $(0, r/2)$ de $\mathbb{R}^2$ est dans la boule ouverte $B((0,0), r)$ mais n'est pas dans A (car $r/2 \neq \sin(0)$.) La partie A ne contient donc aucune boule ouverte de centre $(0,0)$. Cette partie n'est donc pas ouverte.

Autre rédaction possible : la suite $(0, 1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(0,0) \in A$ mais aucun élément de cette suite n'appartient à A (et en particulier, il n'existe pas d'entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $(0, 1/n) \in A$). La partie A n'est donc pas ouverte.

Montrons que A est fermée : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $l = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons x_n le réel tel que $a_n = (x_n, \sin(x_n))$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. De plus, comme la fonction sinus est continue, $(\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sin(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $y = \sin(x)$ et donc que $(x, y) \in A$. On a ainsi vérifié que la limite de toute suite convergente d'éléments de A est dans A, ce qui montre que A est fermée.

EXERCICE BONUS Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x - y}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} + \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

$$\text{et } \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| = \frac{\big| \|y\| - \|x\| \big|}{\|x\|} \leq \frac{\|y - x\|}{\|x\|},$$

$$\text{d'où } \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$