2017/2018 | Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I | Topologie et Théorie de la mesure

Interrogation I

Durée 45mn

Question de cours.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition d'une norme sur E.
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que pour tous x et y éléments de E, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Exercice 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On admet que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent deux normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
Ces deux normes sont-elles équivalentes ? Justifier.
Indication : on pourra considérer la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_n = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n \text{ pour } n \geq 0.$$

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la partie

$$A = \{(x, \sin(x)) \colon x \in \mathbb{R}\}.$$

La partie A est-elle ouverte, est-elle fermée ? Justifier.

Exercice Bonus Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$