

---

## Interrogation II

Durée 45mn

---

QUESTION DE COURS.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1. Soit  $F \subseteq X$ . Donner une condition suffisante et nécessaire pour que  $F$  soit un fermé de  $X$ .
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

EXERCICE. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée.
2. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f_n$  est bornée.

3. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f : x \mapsto x$  et que  $f$  n'est pas bornée. Que peut-on en déduire ?