# Interrogation IV Durée 45mn- Corrigé

Durée 45mn

Exercice 1.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y \leq 5x\}$.

Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto (2x - y)e^{-x^3}$ est intégrable sur $D$, puis calculer

$$I = \iint_D (2x - y)e^{-x^3}dxdy$$

*La fonction $(x, y) \mapsto (2x - y)e^{-x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc borélienne sur $\mathbb{R}^2$.*
*Par Fubini-Tonelli, on a*

$$\begin{aligned}
\iint_D |2x - y|e^{-x^3}dxdy &= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=x}^{5x} |2x - y|e^{-x^3}dydx \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x^3} \left( \int_{y=x}^{2x} (2x - y)dy + \int_{y=2x}^{5x} (y - 2x)dy \right) \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x^3} \left( \frac{x^2}{2} + \left( \frac{25x^2}{2} - 2x^2 - 6x^2 \right) \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{+\infty} 5x^2 e^{-x^3}dx = \frac{5}{3} < +\infty.
\end{aligned}$$

*La fonction $(x, y) \mapsto (2x - y)e^{-x^3}$ est donc intégrable sur D et on peut maintenant appliquer le théorème de Fubini pour calculer $I$. On obtient,*

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=x}^{5x} (2x - y)e^{-x^3}dydx = \int_{x=0}^{+\infty} -4x^2e^{-x^3}dx = -\frac{4}{3}$$

Exercice 2. Soit $a, b \in ]1, +\infty[$. Montrer que

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a + b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\ln(\ln(a)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(b)).$$

En déduire que

$$\ln\left(\frac{a + b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}.$$

*Soit $f\ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(\ln t)$. La fonction $f$ est dérivable et pour $t \in ]1, +\infty[$, on a $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont croissantes à valeurs strictement postives, donc $t \mapsto t\ln t$ est également croissante et ainsi $f'$ est décroissante. On en déduit que $f$ est concave et donc*

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \geq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b),$$

*ce qui correspond à l'inégalité voulue.*
*Pour terminer, on utilise la croissance de la fonction exponentielle et ainsi,*

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)} \geq e^{\frac{1}{2}\ln(\ln(a))+\frac{1}{2}\ln(\ln(b))} = \sqrt{\ln a \ln b}.$$