
Contrôle de substitution

Durée 45mn

EXERCICE 1.

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(x))^n}{1+x^2} dx.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2. Soit un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs x_1, x_2, \dots, x_n . Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

EXERCICE 3.

Dans \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne, on considère l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy = 1\}.$$

1. A est-il fermé ?
2. A est-il compact ?