Contrôle de substitution

Durée 45mn

Exercice 1.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos(x))^n}{1+x^2}\,dx.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{(\cos(x))^n}{1+x^2}$.
Toutes fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc boréliennes.
Pour tout réel x fixé non congru à 0 modulo π, on a $|\cos x| < 1$ et donc

$$\frac{(\cos(x))^n}{1+x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement presque partout vers la fonction nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui entraîne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et, par échange limite/intégrale, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à l'intégrale de la fonction nulle et vaut ainsi 0.

Exercice 2. Soit un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Voir cours

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ xy = 1\}.$$

1. A est-il fermé ?
   Soit (x_n, y_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > 0$ et $x_n y_n = 1$, il suit que $x \geq 0$ et $xy = 1$. Enfin, comme $xy = 1$, on en déduit que $x \neq 0$, d'où $(x,y) \in A$. Ainsi, A est fermé.

(Preuve alternative : notons que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *vérifie* $x \geq 0$ *et* $xy = 1$ *alors* $x \neq 0$ *et donc* $(x, y) \in A$*. Ainsi,*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ xy = 1\}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x, y) = xy$*. Comme* f *est continue et* $\{1\}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$*, on a* $f^{-1}(\{1\})$ *fermé dans* $\mathbb{R}^2$*.*
Ainsi,

$$A = ([0, +\infty[\times\mathbb{R}) \bigcap f^{-1}(\{1\})$$

est intersection de deux fermés donc fermé.)

2. A est-il compact ?
   Pour tout réel a *strictement positif, on a* $(a, 1/a) \in A$ *et* $\|(a, 1/a)\|_2 \geq a$*. Donc* A *n'est pas borné et donc encore moins compact.*