Chapitre 7

Fonctions mesurables et intégration

On va maintenant décrire brièvement quelles fonctions définies sur un espace mesuré on peut intégrer. L'idée est que, si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et f est la fonction caractéristique d'une partie $A \in \mathcal{A}$, alors on voudrait poser $\int_X f d\mu = \mu(A)$. Une fois qu'on a fait ça, on sait comment intégrer toutes les fonctions qui s'écrivent sous la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$: l'intégrale d'une telle fonction devra être $\sum \alpha_i \mu(A_i)$. Et un procédé de passage à la limite nous permettra d'intégrer encore plus de fonctions - les fonctions pour lesquelles ce processus de passage à la limite fonctionne bien sont les *fonctions mesurables.*

7.1 Fonctions mesurables

Définition 7.1. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On dit que $f \colon X \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si, pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$.

Plus généralement, si $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ sont des espaces mesurables, on dit que $f \colon X \to Y$ est mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 7.2. Montrer que, si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $f \colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f \colon (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Montrer qu'on obtient encore la même définition en demandant simplement que $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout intervalle ouvert I.

Exercice 7.3. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f la fonction caractéristique d'une partie $A \in \mathcal{A}$, vue comme une fonction de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable.

Un cas particulier est spécialement important : celui où f est une fonction de $\mathbb{R}^n$, muni de sa tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne.

Définition 7.4. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est *borélienne* si f est mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ dans $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Rappelons qu'une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, $f^{-1}(O)$ est ouvert pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Par conséquent, *toute fonction continue est borélienne* ; la réciproque n'est pas vraie : la fonction caractéristique de $[0, 1]$ (ou de n'importe quelle autre borélien) est borélienne, mais pas du tout continue.

Une bonne raison de s'autoriser à considérer ces fonctions plus générales est qu'on est souvent confronté à des limites simples de suites de fonctions, qui en général ne sont pas continues...

Proposition 7.5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in X$, vers un réel que l'on note $f(x)$. Alors f est mesurable.*

Démonstration. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert. Si $f(x) \in I$, alors $f_n(x)$ appartient à I pour tout n assez grand, par définition de la limite. Réciproquement, si $f_n(x) \in I$ pour tout n suffisamment grand, alors $f(x) \in [a, b]$. Ainsi, on voit que $f(x) \in I$ si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f_n(x) \in]a + \varepsilon, b - \varepsilon[$ pour tout n suffisamment grand ; menant à l'égalité suivante :

$$f^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \colon f_m(x) \in \left] a + \frac{1}{N}, b - \frac{1}{N} \right[\right\} .$$

Chacun des ensembles $\{x\colon f_m(x) \in \left]a+\frac{1}{N}, b-\frac{1}{N}\right[\}$ appartient à $\mathcal{A}$ puisque f_m est mesurable ; une intersection d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ est encore un élément de $\mathcal{A}$, et de même pour une réunion, ce qui nous donne la conclusion souhaitée. $\square$

Proposition 7.6. *Soit $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$ trois espaces mesurables. Supposons que $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable.*

Preuve:

Soit $C \in \mathcal{C}$. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(C) = \{x \in X\colon g(f(x)) \in C\} = \{x \in X\colon f(x) \in g^{-1}(C)\} = f^{-1}(g^{-1}(C)) \ .$$

Puisque g est mesurable, $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$; et alors le fait que f est mesurable nous donne que $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. On vient de montrer que $(g\circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, autrement dit que $g\circ f$ est mesurable.

Exercice 7.7. Montrer que l'addition $(x,y) \mapsto x+y$ et la multiplication $(x,y) \mapsto xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont boréliennes.

Exercice 7.8. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable, et f,g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f+g$ et fg sont mesurables.

Rappelons que, si $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes, on dit que f et g sont égales *presque partout* si $\lambda(\{x\colon f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (c'est-à-dire, si l'ensemble de tous les x tels que $f(x) \neq g(x)$ est négligeable, ou encore si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x)

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne et nulle presque partout.

Par la suite, il sera utile pour nous d'autoriser certaines fonctions à prendre la valeur $+\infty$.

Définition 7.9. Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *fonction mesurable à valeurs positives* est une fonction $f\colon X \to [0,+\infty]$ telle que :
- $f^{-1}(\{+\infty\})$ soit mesurable, et
- Pour tout borélien B de $[0,+\infty[$, $f^{-1}(B)$ soit mesurable.

7.2 Intégrale des fonctions mesurables

Dans cette partie, on fixe un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$. On commence par le cas particulier des fonctions mesurables à valeurs positives, qui sont exactement les fonctions de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \ ,$$

où chaque A_i appartient à $\mathcal{A}$ et $\alpha_i \geq 0$ (attention, éventuellement, un des α_i peut être égal à $+\infty$!). Pour une telle fonction, on pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \ .$$

Il faut faire un peu attention, et vérifier que la définition précédente ne dépend pas de la façon dont on écrit f sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$...

Ensuite, un procédé de passage à la limite que l'on ne décrira pas ici nous permet de définir l'intégrale d'une fonction mesurable et à valeurs dans $[0,+\infty]$; cette intégrale peut valoir $+\infty$! Puis, en écrivant une fonction mesurable quelconque f sous la forme $f = f^+ - f^-$, on arrive à définir l'intégrale des fonctions mesurables f, à la condition que $\int_X |f| d\mu < +\infty$. On dit que ces fonctions sont *intégrables*.

Étant donnée une partie mesurable $A \subseteq X$, et une fonction mesurable $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$\int_A f d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A d\mu.$$

Résumons ici les propriétés de l'intégrale ainsi obtenue, que l'on admettra :

Proposition 7.10. *Pour toutes fonctions mesurables $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ intégrables sur une partie mesurable $A \subseteq X$ on a*

1. $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$ *;*
2. *pour toutes constantes réelles α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est également mesurable et intégrable sur A et*
$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu \text{ (linéarité de l'intégrale);}$$
3. *si $f = g$ presque partout, alors $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$;*
4. *si $f \geq 0$ presque partout, alors $\int_A f d\mu \geq 0$* (positivité de l'intégrale) *;*
si $f \leq g$ presque partout, alors $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ (monotonie de l'intégrale) *;*
5. *si $\mu(A) = 0$ alors $\int_A f d\mu = 0$;*
6. *si A_1, A_2 sont des parties mesurables de A telles que $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$, alors*
$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu \ .$$

On a de plus

7. L'inégalité triangulaire
$$\left| \int_A (f+g) d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu + \int_A |g| d\mu \ .$$

Remarque 7.11. Rappelons que l'intégrale est d'abord définie pour les fonctions mesurables à valeurs positives ($+\infty$ compris) et possède les propriétés ci-dessus pour ces fonctions. Répétons également que, quand on écrit que f est une fonction mesurable de X à valeurs dans l'intervalle fermé $[0, +\infty]$, on entend que $A = \{x \in X \colon f(x) = +\infty\}$ est mesurable, et que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est mesurable. Dans ce cas, l'intégrale de f peut valoir $+\infty$. Si f est intégrable (c.à.d. si $\int_X f d\mu < +\infty$) alors, par monotonie, la partie A où f vaut $+\infty$ est négligeable (c.à.d. $\mu(A) = 0$).

Proposition 7.12 (Inégalité de Tchebychev). *Soit $f\colon X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a*
$$\mu(\{x \colon f(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu \ .$$

Preuve:

Notons $B = \{x \in X \colon f(x) \geq \alpha\}$. Alors $\alpha \mathbf{1}_B \leq f$ et par monotonie de l'intégrale, on a
$$\alpha \mu(B) \leq \int_X f d\mu \ .$$

Les propriétés de l'intégrale rappelées dans la proposition 7.10 se vérifient directement à partir de la définition de l'intégrale, à l'exception de la linéarité ou plus précisément de la propriété $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$ qui est un corollaire du théorème de convergence monotone. Pour montrer ce dernier, nous allons utiliser la propriété supplémentaire suivante que nous admettrons. Cette propriété se vérifie tout d'abord pour les fonctions simples positives de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, puis pour toutes les fonctions positives intégrables par le procédé de passage à la limite permettant de définir l'intégrale.

Proposition 7.13 (Mesures à densité). *Soit $f\colon X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit une application $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ par*
$$\nu(A) = \int_A f d\mu \ .$$
Alors, ν est une mesure sur X, appelée mesure de densité *f par rapport à μ.*

Exemple. On peut définir une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ en posant
$$\mu(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda(x) \ .$$

Cette mesure s'appelle la *mesure gaussienne*.

Théorème 7.14 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit $f_n\colon X \to [0,+\infty]$ une suite de fonctions mesurables telle pour presque tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ soit une suite croissante. Alors il existe une fonction mesurable $f\colon X \to [0,+\infty]$ telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout, et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \ .$$

Preuve:

On peut supposer que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est une suite croissante (la partie où ce n'est pas le cas étant négligeable). Dans ce cas, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ a une limite (finie ou infinie) que l'on note $f(x)$. Cette limite f est alors mesurable (voir la preuve de la proposition 7.5 et la remarque 7.11).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ et donc, par monotonie de l'intégrale, la suite $\int_X f_n d\mu$ a une limite vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \ .$$

Pour l'inégalité réciproque, considérons $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $E_n = \{x \in X\colon f_n(x) \geq \alpha f(x)\}$. Alors, par linéarité, chaque E_n est mesurable. De plus, par hypothèse, on a $E_n \subseteq E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Comme $A \mapsto \int_A \alpha f d\mu$ définie une mesure, on en déduit par la proposition 6.13 4 que

$$\int_X \alpha f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \alpha f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

En faisant tendre α vers 1, on conclut que

$$\int_X \alpha f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

Théorème 7.15 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. *Pour presque tout $x \in X$, la suite $f_n(x)$ est convergente vers une limite qu'on appelle $f(x)$.*
2. *Il existe une fonction $g\colon X \to [0,+\infty]$ mesurable et intégrable, telle que pour presque tout x on ait*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors f est intégrable (ainsi que les f_n), et on a

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

Rappelons que dans le théorème ci-dessus, il est fondamental que *la fonction g ne dépende pas de n* et que g soit intégrable, c'est-à-dire $\int_X g d\mu < \infty$.

Dans l'énoncé, l'application f est définie presque partout et on la définit par 0 (ou par une fonction mesurable quelconque) sur le complémentaire qui est négligeable. Par la proposition 7.5, la fonction f est mesurable.

Preuve:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n| \leq g$ presque partout et de même $|f| \leq g$ presque partout par passage à la limite. Comme g est intégrable, par monotonie les f_n et f le sont également.

Pour simplifier, on suppose par la suite la convergence simple et les inégalités vraies partout. On pose pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = \inf_{k\geq n} (2g - |f - f_k|).$$

On peut alors vérifier que les fonctions h_n sont mesurables, positives et majorées par $2g$. De plus, pour tout x, la suite $h_n(x)$ est croissante et converge vers $2g$. Par le théorème de convergence monotone, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X h_n d\mu = \int_X 2g d\mu$.

Par définition, on a pour tout n :

$$\int_X h_n d\mu \leq \int_X (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \int_X 2g d\mu \ .$$

Ainsi,

$$\left|\int_X f d\mu - \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\int_X (f-f_n)d\mu\right| \le \lim_{n\to+\infty}\int_X |f-f_n|d\mu = 0.$$

Ces théorèmes ont pour corollaires les théorèmes analogues d'échanges séries/intégrales et de continuité ou dérivabilité des intégrales à paramètres vus dans la première partie pour la mesure de Lebesgue.

Discutons quelques exemples.

1. Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, que vaut l'intégrale dans ce cas ? Pour le comprendre, commençons par le cas d'une fonction positive $f\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty[$, et même, par un cas simple, où il existe N tel que $f(n) = 0$ pour tout $n \ge N$. Dans ce cas, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1,\dots,x_k$ et on a par définition de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i\,|\{p \in \mathbb{N}\colon f(p) = x_i\}|$$
Dans la somme ci-dessus, x_i apparaît exactement autant de fois qu'il existe d'entiers p pour lesquels $f(p) = x_i$; autrement dit, la somme ci-dessus est simplement la somme de toutes les valeurs de f, c'est-à-dire
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{p=0}^{N} f(p)\ .$$
On vient de voir que, au sens de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on a $\int_N f d\mu = \sum_{p=0}^{+\infty} f(p)$, du moment que f est à valeurs positives et nulle pour n suffisamment grand. Maintenant, si jamais $f\colon \mathbb{N} \to [0,+\infty[$ est une fonction quelconque, alors on peut considérer la suite (f_N) définie par
$$f_N(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \le N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Pour tout i fixé, la suite $(f_N(i))$ est croissante vers $f(i)$; on peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour déduire que
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \lim_{N\to+\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{N\to+\infty}\sum_{i=0}^{N} f(i) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)\ .$$
Ainsi, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$ pour toute fonction positive f ; on en déduit qu'une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est intégrable si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} |f(i)|$ converge (ou encore la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$ est absolument convergente) , et que dans ce cas-là, on a encore $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} f(i)$.
Par conséquent, la sommation de séries absolument convergentes peut être vue comme un cas particulier de calcul d'intégrale, relativement à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
2. Supposons maintenant que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque, $f\colon X \to [0,+\infty]$ est mesurable et ν est la mesure de densité f par rapport à μ. Alors, on sait que, pour toute partie mesurable A, on a
$$\int_X \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f\mathbf{1}_A d\mu\ .$$
En suivant le même cheminement que ci-dessus (et en admettant le fait que toute fonction mesurable, à valeurs positives, est une limite presque partout de fonctions mesurables, positives et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) on peut alors montrer qu'on a, pour toute fonction mesurable $g\colon X \to [0,+\infty]$:
$$\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu\ .$$
Cette formule permet de déduire que les fonctions ν-intégrables sont les fonctions $g\colon X \to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_X f|g|d\mu < +\infty$, et que pour ces fonctions on a aussi $\displaystyle\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$.

7.3 Mesure produit et théorèmes de Fubini

Définition 7.16. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *σ-fini* s'il existe une suite de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n, et $X = \bigcup_n A_n$.

Cette hypothèse est par exemple vérifiée quand $\mu(X) < +\infty$ (donc en particulier quand μ est une mesure de probabilité), quand $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, ou quand $X = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.

La méthode de base pour calculer une intégrale d'une fonction de 2 variables est de se ramener à des intégrales de fonctions de 1 variable. Pour cela il nous faut d'abord expliquer comment on peut munir $X \times Y$ d'une structure d'espace mesuré quand X, Y sont tous les deux munis d'une telle structure.

Définition 7.17. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ et $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la tribu engendrée par les parties de la forme $A \times B$, où $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$; on l'appelle *tribu produit* des tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Alors il existe une unique mesure ν sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant $\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{B}$. Cette mesure est notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, et est σ-finie.

On n'essaiera pas de rentrer dans le détail de la construction de cette mesure ; notons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ et que , si λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, alors on a toujours $\lambda_{n+m} = \lambda_n \otimes \lambda_m$.

La mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ étant définie à partir de μ_1 et μ_2, on s'attend à ce qu'il en aille de même de l'intégrale d'une fonction mesurable relativement à $\mu_1 \otimes \mu_2$. Et c'est effectivement le contenu des théorèmes de Fubini.

Théorème 7.18 (Fubini–Tonelli)**.** *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f \colon X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable. Alors :*

1. *$y \mapsto f(x, y)$ est une fonction mesurable (sur $(X_2, \mathcal{T}_2)$ dans $[0, +\infty]$) pour tout $x \in X_1$, et $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est une fonction mesurable (sur $(X_1, \mathcal{T}_1)$).*
2. *$x \mapsto f(x, y)$ est une fonction mesurable (sur $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dans $[0, +\infty]$) pour tout $y \in X_2$, et $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est une fonction mesurable (sur $(X_2, \mathcal{T}_2)$).*
3. *On a*
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \ .$$

Comme dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, on en déduit facilement un théorème qui s'applique à toutes les fonctions intégrables (et pour vérifier qu'une fonction est intégrable, on peut commencer par appliquer le théorème de Fubini–Tonelli à $|f|$).

Théorème 7.19 (Fubini)**.** *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ une fonction* intégrable. *Alors :*

1. *$y \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable (sur X_2) pour presque tout $x \in X_1$, et $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ est une fonction intégrable (sur X_1).*
2. *$x \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable (sur X_1) pour preseque tout $y \in X_2$, et $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ est une fonction intégrable (sur X_2)*
3. *On a*
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) d\mu_1 \otimes \mu_2(x, y) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \ .$$