Chapitre 2

Fonctions continues entre espaces métriques

2.1 Fonctions continues et uniformément continues

Maintenant qu'on sait ce qu'est une distance, on peut définir la continuité pour des fonctions entre espaces métriques, plutôt que de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; c'est essentiellement la même chose, en remplaçant $|x-y|$ (qui n'a a priori pas de sens dans un espace métrique) par $d(x,y)$.

Définition 2.1. Soit (X,d) et (Y,D) deux espaces métriques, $f\colon X \to Y$ et $x \in X$. On dit que f est *continue en x* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X \ d(x,x') < \delta \Rightarrow D(f(x),f(x')) < \varepsilon \ .$$

On dit que f est *continue sur X* si elle est continue en x pour tout $x \in X$, autrement dit :

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X \ d(x,x') < \delta \Rightarrow D(f(x),f(x')) < \varepsilon \ .$$

Ou encore (l'ordre dans lequel on écrit les deux $\forall$ ne change pas le sens de l'énoncé) :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists \delta > 0 \ \forall x' \in X \ d(x,x') < \delta \Rightarrow D(f(x),f(x')) < \varepsilon \ .$$

Il faut bien comprendre que, ci-dessus, δ dépend de ε *et du point x où l'on se place*. Une définition plus forte imposerait que le même δ fonctionne pour tous les $x \in X$ simultanément ; dans ce cas, on dit que f est *uniformément continue*.

Définition 2.2. Soit (X,d) et (Y,D) deux espaces métriques, et $f\colon X \to Y$. On dit que f est *uniformément continue sur X* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \forall x' \in X \ d(x,x') < \delta \Rightarrow D(f(x),f(x')) < \varepsilon \ .$$

Par rapport à la définition de la continuité, on a remplacé "$\forall x \in X \ \exists \delta > 0$" par "$\exists \delta > 0 \ \forall x \in X$" : δ dépend toujours de ε, mais ne dépend plus de x. Toute fonction uniformément continue est continue, mais la réciproque est fausse.

Exercice 2.3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall x' \in \mathbb{R} \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall x' \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Définition 2.5. Soit (X,d) et (Y,D) deux espaces métriques. On dit que $f\colon X \to Y$ est *lipschitzienne* s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X \ D(f(x),f(x')) \le K d(x,x') \ .$$

Propriété 2.6. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. (Preuve en exercice.)

Exercice 2.7. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Théorème 2.8. *Soit (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques, $f: X \to Y$ une fonction et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *f est continue en x.*
- *Pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.*

Preuve:

Supposons tout d'abord que f est continue en x, et fixons une suite (x_n) qui converge vers x ainsi que $\varepsilon > 0$. D'une part il existe $\delta > 0$ tel que $D(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$ dès que $d(x, x') < \delta$; d'autre part il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) \leq \delta$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $d(f(x_n), f(x)) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas continue en x :

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists y \in X \ d(x, y) < \delta \text{ et } d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus, et appliquons la propriété pour $\delta = \frac{1}{n}$: ceci nous donne une suite (y_n) telle que $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en particulier, (y_n) converge vers x) mais $d(f(y_n), f(x)) \geq \varepsilon$ (par conséquent, $f(y_n)$ ne converge pas vers $f(x)$).

Théorème 2.9. *Soit (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques et $f: X \to Y$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *f est continue.*
2. *Pour tout ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.*
3. *Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*

On rappelle que $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ désigne l'*image inverse* de A par f.

Preuve:

Supposons que f est continue, et soit O un ouvert de Y. Fixons $x \in f^{-1}(O)$, et considérons une suite (x_n) qui tend vers x. Alors $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ puisque f est continue, donc $f(x_n)$ appartient à O pour n suffisamment grand puisque $f(x) \in O$ et O est ouvert. Par conséquent, $x_n \in f^{-1}(O)$ pour n suffisamment grand, ce qui nous montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert, et on a montré que (1) $\Rightarrow$ (2).

Si (2) est vrai et F est fermé dans Y, alors $Y \setminus F$ est ouvert et par hypothèse on obtient que $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert dans X, autrement dit $f^{-1}(F)$ est fermé dans X. Ceci établit l'implication (2) $\Rightarrow$ (3), et en fait le même argument de passage au complémentaire donne l'implication réciproque (3) $\Rightarrow$ (2).

Il nous reste à prouver que (2) $\Rightarrow$ (1) ; supposons donc de nouveau que (2) soit vérifié, et considérons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert contenant $f(x)$, son image inverse est par hypothèse un ouvert contenant x, par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, c'est-à-dire :

$$\forall x' \in X \ d(x, x') < \delta \to D(f(x), f(x')) < \varepsilon \ .$$

On a bien montré que f est continue.

On voit dans cette preuve qu'il vaut mieux être à l'aise avec les propriétés de l'image inverse par une fonction... Ce sera aussi très important dans la partie du cours consacrée à la théorie de la mesure !

Exercice 2.10. Soit X, Y deux ensembles, $f: X \to Y$ une fonction. Montrer que, pour tout $A, B \subseteq Y$ on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 2.11. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f: x \mapsto x^2$.
1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

Proposition 2.12. *Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, ainsi que $f: Y \to Z$ et $g: X \to Y$ deux fonctions continues. Alors $f \circ g: X \to Z$ est continue.*

Preuve:

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $y, y' \in Y$ on ait $d_Y(y, y') < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(y), f(y')) < \varepsilon$. Puis, comme g est continue, il existe δ_2 tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait $d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1$. On a alors, pour tout $x, x' \in X$:

$$d_X(x, x') < \delta_2 \Rightarrow d_Y(g(x), g(x')) < \delta_1 \Rightarrow d_Z(f(g(x)), f(g(x')) < \varepsilon \ .$$

On vient de prouver que $f \circ g$ est continue.

Exercice 2.13. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\| \cdot \|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.

Exercice 2.14. Soit (X, d) un espace métrique et $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 2.15. Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, ainsi que $f \colon Y \to Z$ et $g \colon X \to Y$ deux fonctions uniformément continues. Montrer que $f \circ g \colon X \to Z$ est uniformément continue.

2.2 Suites de fonctions

Tout comme la continuité, les notions de convergence simple/uniforme de suites de fonctions qu'on connaît pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'étendent sans difficultés aux fonctions entre espaces métriques.

Définition 2.16. Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions de X dans Y. On dit que (f_n) converge *simplement* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$; autrement dit :

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ .$$

Ci-dessus, N dépend à la fois de ε et de x ; comme dans la définition de la continuité, on pourrait demander que N ne dépende que de ε, et on obtient ainsi la définition de la convergence *uniforme.*

Définition 2.17. Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions de X dans Y. On dit que (f_n) converge *uniformément* vers une fonction $f \colon X \to Y$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n \geq N \ D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \ .$$

Bien entendu, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque est fausse, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 2.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon [0, 1] \to [0, 1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n, puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-ele uniforme ? f est-elle continue ?

On voit donc que la convergence simple ne préserve pas la continuité (ce qui sera une bonne raison, plus tard, pour travailler avec des fonctions *mesurables* plutôt que des fonctions continues).

Proposition 2.19. *Soit (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques, et (f_n) une suite de fonctions continues de X dans Y. Si (f_n) converge uniformément vers $f \colon X \to Y$ alors f est continue.*

Preuve:

Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $D(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Fixons un tel N ; comme f_N est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' \in X$,

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f_N(x), f_N(x')) < \varepsilon.$$

Alors on a, pour tout $x' \in X$ tel que $d(x, x') < \delta$:

$$\begin{aligned} D(f(x), f(x')) &\leq D(f(x), f_N(x)) + D(f_N(x), f_N(x')) + D(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Comme ε était quelconque, ceci suffit à démontrer que f est continue en x.

Propriété 2.20. Une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue. (Preuve en exercice.)