Chapitre 5

Intégrale de fonctions de plusieurs variables réelles

5.1 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

De même que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ généralise la notion de longueur, on peut généraliser la notion d'aire (dans $\mathbb{R}^2$), de volume (dans $\mathbb{R}^3$)...

Théorème 5.1. *Soit $n \geq 1$ un entier. Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}^n$ -ou plutôt, sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$), notée λ_n, telle que*

$$\lambda_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \; .$$

On appelle cette mesure la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Quand $n = 2$, la formule ci-dessus nous dit que la mesure d'un rectangle (dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées) est égale au produit des longueurs de ses côtés, c'est-à-dire à son aire ; quand $n = 3$ on retrouve la formule pour le volume d'un pavé, etc.

Exactement de la même façon que pour la définition de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, de l'intégrale par rapport à une mesure quelconque), on peut définir tout d'abord l'intégrale pour les fonctions boréliennes et à valeurs dans $[0, +\infty]$, et ensuite pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ boréliennes et telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n < +\infty$. Cette notion d'intégrale a les mêmes propriétés que celles qu'on a énoncées au chapitre précédent : positivité, linéarité, inégalité triangulaire... Elle est définie en posant tout d'abord $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A d\lambda_n = \lambda_n(A)$, si A est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{1}_A$ est sa fonction caractéristique ; puis en étendant par linéarité aux combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, puis par un procédé de passage à la limite pour définir l'intégrale de toutes les fonctions boréliennes et à valeurs positives. Comme dans le cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on dit que f est *intégrable* si f est borélienne et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n$ est finie.

On voit donc que, exactement comme dans le cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, les fonctions boréliennes et à valeurs positives jouent un rôle particulier ; on peut toujours calculer leur intégrale, et celle-ci peut valoir $+\infty$.

5.2 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

La méthode de base pour calculer une intégrale d'une fonction de n variables est de se ramener à n calculs successifs d'intégrales de fonctions de 1 variable.

Théorème 5.2 (Théorème de Fubini-Tonelli)**.** *Soit m, p deux entiers et $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ une fonction* *borélienne. Alors on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{m+p}} f d\lambda_{m+p} &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)d\lambda_p(y)\right) d\lambda_m(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda_m(x)\right) d\lambda_p(y)\end{aligned}$$

En pratique, dans les exercices, m et p vaudront le plus souvent 1 ou 2.

Remarque 5.3. L'énoncé ci-dessus sous-entend que les fonctions apparaissant dans les intégrales (par exemple, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)d\lambda_p(y)$) sont boréliennes...

Remarque 5.4. Comme dans le cas de $\mathbb{R}$, intégrer une fonction de n variables sur une partie borélienne A de $\mathbb{R}^n$ revient à intégrer la fonction $f \cdot \mathbf{1}_A$ sur $\mathbb{R}^n$, donc l'énoncé ci-dessus peut être utilisé pour calculer les intégrales de fonctions boréliennes définies sur des sous-parties boréliennes de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Calculons l'aire du disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Par définition, l'aire d'une partie D est l'intégrale de la fonction caractéristique de D sur $\mathbb{R}^2$; on a donc

$$\begin{aligned}\text{aire}(D) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_D(x,y)d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} d\lambda(y)\right) d\lambda(x) \\ &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \\ &= \pi\end{aligned}$$

On voit que, dans le calcul ci-dessus, on n'a pas pris en compte les points en dehors de D, puisque $\mathbf{1}_D$ vaut 0 en ces points : en pratique, on détermine dans quel domaine varie x (ici, $[-1,1]$) puis, *à x fixé*, dans quel domaine varie y, et on calcule les intégrales correspondantes.

Bien sûr, on aurait pu aussi faire le calcul « dans l'autre sens », en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y ; ici ça ne changerait rien (la fonction intégrée et le domaine sont symétriques en x, y) mais dans d'autres cas un des calculs peut être beaucoup plus facile que l'autre.

Dans le cas où f n'est pas à valeurs positives, on a d'abord besoin de s'assurer que $|f|$ est intégrable, ce qui peut être fait en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli.

Théorème 5.5 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $f \colon \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $|f|$ est intégrable. Alors on a :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{m+p}} f d\lambda_{m+p} &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)d\lambda_p(y)\right) d\lambda_m(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda_m(x)\right) d\lambda_p(y)\end{aligned}$$

Remarque 5.6. Comme dans le cas du théorème de Fubini-Tonelli, il est sous-entendu que les fonctions apparaissant dans l'intégrable sont boréliennes (en fait, elles ne sont définies que presque partout, mais ça n'affecte pas la valeur de l'intégrale ; on reverra cela plus en détail quand on énoncera le théorème de Fubini pour des mesures plus générales)

Remarque 5.7. Dans le cas particulier d'une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^{m+p}$, on sait qu'elle est toujours intégrable ; il n'y a donc pas besoin dans ce cas d'utiliser au préalable le théorème de Fubini-Tonelli, par contre il faut bien vérifier que la fonction f est continue, et surtout que le domaine d'intégration est compact...

Pour essayer de se convaincre que le théorème de Fubini est « raisonnable », donnons-en une preuve dans le cas où on intègre une fonction *continue* f sur un rectangle $[a,b] \times [c,d]$. Notons d'abord que sous ces hypothèses $|f|$ est bien intégrable puisqu'elle est bornée et que le domaine d'intégration est de mesure finie. On veut montrer que :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \ .$$

Pour cela, on introduit deux fonctions $F, G \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy \right) dx \quad \text{et} \quad G(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \ .$$

Commençons par étudier F ; elle est de la forme $F(t) = \displaystyle\int_a^b h(x,t)dt$, avec $h(x,t) = \displaystyle\int_c^t f(x,y)dy$. A x fixé, la fonction $t \mapsto h(x,t) = \displaystyle\int_c^t f(x,y)dy$ est dérivable, de dérivée $f(x,t)$; de plus cette dérivée est bornée. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour conclure que F est dérivable sur $[c,d]$, de dérivée $F'(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dx$.

Passons à G : le théorème de continuité des intégrales à paramètres nous permet de voir que $g \colon y \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ est une fonction continue sur $[c,d]$. Puisque $G(t) = \displaystyle\int_c^t g(y)dy$, on voit que G est dérivable et que $G'(t) = g(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dx$.

On voit donc que F et G sont dérivables, et que $F' = G'$ sur $[c,d]$; de plus on a $F(c) = G(c) = 0$. On en conclut que F et G sont égales sur $[c,d]$, en particulier $F(d) = G(d)$, ce qu'on voulait démontrer.

5.3 Théorème de changement de variables

En pratique, pour calculer une intégrale multiple, on est souvent amené à faire un changement de variables pour se ramener à un domaine plus simple sur lequel appliquer le théorème de Fubini. Toutes les fonctions ne sont pas acceptables pour ce théorème : les fonctions que l'on peut utiliser pour faire un changement de variable sont les *difféomorphismes de classe* $\mathcal{C}^1$.

Définition 5.8. Étant donné U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on note $J\varphi(x)$ la matrice jacobienne de φ en un point $x \in U$; rappelons qu'il s'agit de la matrice dont le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne vaut $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)$.

Définition 5.9. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $\varphi \colon U \to V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si :

1. φ est une bijection de U sur V.
2. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, c'est-à-dire que chaque dérivée $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur U.
3. La bijection réciproque φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 5.10. Comme $\varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$ pour tout $x \in U$ par définition, on obtient en appliquant la règle de la chaîne que $J\varphi^{-1}(\varphi(x))J\varphi(x) = I_n$ (la matrice identité) pour tout $x \in U$; en particulier $J\varphi(x)$ doit être inversible pour tout $x \in U$ si φ est un difféomorphisme (ce qui revient à dire que son déterminant est non nul).

Un exemple fondamental de difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est donné par une application linéaire et inversible ; rappelons que si φ est linéaire, sa matrice jacobienne est simplement la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Souvent, pour vérifier qu'une application est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise la caractérisation suivante.

Théorème 5.11 (Théorème d'inversion globale). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si φ est injective sur U et $\det(J\varphi(x)) \neq 0$ pour tout $x \in U$, alors $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $\varphi(U)$.*

Remarque 5.12. Toute la difficulté du théorème précédent est dans la démonstration que $\varphi(U)$ est ouvert. Si on suppose que $\varphi(U)$ est ouvert dans l'énoncé ci-dessus, alors le fait que φ soit un difféomorphisme vient simplement du fait qu'on sait calculer « explicitement »l'inverse d'une matrice inversible (via le lien entre inverse et comatrice).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de changement de variables.

Théorème 5.13 (Théorème de changement de variables). *Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi\colon U \to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Rappelons qu'on note λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a :*

1. *Pour toute partie B borélienne de U, $\lambda_n(\varphi(B)) = \displaystyle\int_B |\det(J\varphi(x))| d\lambda_n(x)$.*
2. *Si $f\colon V \to [0, +\infty]$ est borélienne, alors*
$$\int_V f(x) d\lambda_n(x) = \int_U f \circ \varphi(y) |\det(J\varphi(y))| d\lambda_n(y) \ .$$
3. *Si $f\colon V \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors $y \mapsto f \circ \varphi(y)|\det(J\varphi(y))|$ est intégrable sur U et on a*
$$\int_V f(x) d\lambda_n(x) = \int_U f \circ \varphi(y) |\det(J\varphi(y))| d\lambda_n(y) \ .$$

La définition de l'intégrale fait que (3) est une conséquence immédiate de (2) ; et (1) est un cas particulier de (2) appliqué à la fonction caractéristique de $\varphi(B)$. La définition fait aussi qu'il n'est pas difficile de déduire (2) une fois qu'on a démontré (1).

Ce théorème est difficile à démontrer, et on ne va pas essayer de donner une idée de la preuve dans le cas où φ n'est pas une application linéaire. Discutons un peu la preuve de (1) dans le cas où φ est une application linéaire. Étudions quelques cas particuliers :

1. La matrice M de φ dans la base canonique est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & t & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$. Alors on a $\varphi([0,1]^n) = [0,1] \times [0,1] \times \ldots [0,t] \times [0,1] \times \ \ldots [0,1]$ si $t > 0$, et $[0,1] \times [0,1] \times \ldots [t,0] \times [0,1] \times \ \ldots [0,1]$ si $t < 0$. Dans les deux cas, on a par définition de la mesure de Lebesgue que
$$\lambda_n(\varphi([0,1]^n) = |t| = |\det(M)|\lambda_n([0,1]^n) \ .$$
2. La matrice M est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} N & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix}$, où $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on a $\varphi([0,1]^n) = D \times [0,1]^{n-2}$, où D est le parallélogramme de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, (1.1) et $(1,2)$ (faites un dessin !). Par conséquent $\lambda_n(\varphi([0,1]^n) = \text{aire}(D) = 1$, et $\det(M) = \det(N) = 1$. Donc dans ce cas on a bien comme espéré que $\lambda_n(\varphi([0,1]^n) = |\det(M)|\lambda_n(\varphi([0,1]^n)$.
3. La matrice M est une *matrice de permutation*, c'est-à-dire que φ est une application linéaire permutant les vecteurs de base. Alors la déterminant de M vaut ± 1 (ce dont on peut se convaincre par récurrence, en développant le déterminant de M par rapport à la première ligne par exemple, et en utilisant que M a exactement un 1 sur chaque ligne et chaque colonne, et des 0 ailleurs ; ou bien en revenant à la formule définissant le déterminant), et $\varphi([0,1]^n) = [0,1]^n$. On a donc encore $\lambda_n(\varphi([0,1]^n) = |\det(M)|\lambda_n(\varphi([0,1]^n)$

Pour l'instant, on a le résultat désiré pour des matrices de trois types, et $B = [0,1]^n$; par pavage, on peut se convaincre qu'on a alors le résultat désiré pour une matrice d'un de ces trois types et B n'importe quelle partie borélienne de $\mathbb{R}$. Ensuite, un théorème d'algèbre linéaire nous dit que l'on peut écrire toute matrice inversible

M sous la forme $M = M_1 M_2 \dots M_p$, où chaque matrice M_i est d'un des trois types ci-dessus. On peut donc écrire, si φ est une bijection linéaire de matrice M et B une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(B)) &= \lambda_n(M_1 \dots M_p(B)) \\
&= |\det(M_p)|\lambda_n(M_1 \dots M_{p-1}(B)) \\
&= |\det(M_p)| \dots |\det(M_1)|\lambda_n(B) \\
&= |\det(M)|\lambda_n(B).
\end{aligned}$$

Exemple (changement de variables en polaires)**.** On considère l'application $\phi : U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Alors, la matrice jacobienne de ϕ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, de déterminant r.

De plus, ϕ est injective et $\phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty[= V$.

Ainsi, ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Comme $\lambda_2(\mathbb{R}^2 \setminus V) = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 \setminus V$ est négligeable, il n'est pas gênant que ϕ ne soit pas un difféomorphisme de U sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Par exemple, calculons

$$I = \int_D (x+y)^2 dxdy, \text{ où } D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 1\}.$$

En utilisant le théorème de changement de variables avec les coordonnées polaires (et le théorème de Fubini), on obtient $\phi^{-1}(D) =]0, 1[\times]0, 2\pi[$ et

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\phi^{-1}(D)} (r\cos\theta + r\sin\theta)^2 r dr d\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3(\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 2\pi r^3 dr \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$