Chapitre 3

Compacité

Définition 3.1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *compact* s'il a la propriété suivante : pour toute suite (x_n) d'éléments de X, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans X.

Un exemple fondamental d'espace compact est donné par un intervalle fermé borné (un *segment*) de $\mathbb{R}$ ou, plus généralement n'importe quelle partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. On verra plus loin, Théorème 3.9 et Corollaire 3.13, qu'en fait les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement ses parties fermées bornées.

Théorème 3.2. *Toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, en particulier tout segment, est compacte.*

Preuve:

Considérons une suite (x_n) d'éléments d'une partie F fermée bornée de $\mathbb{R}$. Par la proposition 1.21, il existe une suite extraite (x_{n_k}) qui est monotone. Comme cette sous-suite est bornée et monotone, elle converge. Sa limite est dans F car F est fermé.

Proposition 3.3. *Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques compacts. Alors $X \times Y$, muni de la distance produit, est encore un espace métrique compact.*

Preuve:

Soit (x_n, y_n) une suite d'éléments de $X \times Y$. Par compacité de (X, d), on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi_1(k)})$ qui converge vers $x \in X$. Et par compacité de (Y, D), on peut extraire de $(y_{\varphi_1(k)})$ [i] une nouvelle sous-suite $y_{\varphi_1(\varphi_2(l))}$ [ii] qui converge vers $y \in Y$.
Notons $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Alors la suite $(x_{\psi(l)}, y_{\psi(l)})$ est telle que $x_{\psi(l)}$ converge vers x et $y_{\psi(l)}$ converge vers y, autrement dit, cette suite est une suite extraite de (x_n, y_n) qui converge vers (x, y).

Corollaire 3.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, l'ensemble $\prod [a_i, b_i]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance induite par $\| \cdot \|_\infty$.

Preuve:

Chacun des espaces $[a_i, b_i]$ est compact, et par récurrence on montre facilement à partir de la proposition précédente qu'un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.

Théorème 3.5. *Soit (X, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble compact de X (c'est-à-dire que (A, d) est un espace métrique compact). Alors A est fermé dans X.*

Preuve:

Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x \in X$; on doit prouver que $x \in A$. Comme A est compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $a \in A$; et (x_{n_k}) converge toujours vers x. Par unicité de la limite, $x = a \in A$.

Réciproquement, on a le résultat suivant.

i. Pourquoi n'extrait-on pas de (y_n) ?
ii. Pourquoi $\varphi_1(\varphi_2(l))$ et pas $\varphi_2(\varphi_1(k))$?

Proposition 3.6. *Soit (X, d) un espace métrique compact et A une partie fermée de X. Alors (A, d) est un espace métrique compact.*

Preuve:

Soit (a_n) une suite d'éléments de A. Comme X est compact et (a_n) est aussi une suite d'éléments de X, il existe une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers $x \in X$; comme A est fermé, $x \in A$, ce qui montre que (a_n) a une sous-suite convergente dans A : (A, d) est compact.

La compacité est importante pour nous en particulier parce que les fonctions continues sur les espaces compacts ont des propriétés très fortes.

Théorème 3.7. *Soit (X, d) un espace métrique compact, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve:

Montrons que f atteint sa borne supérieure $M = \sup(\{f(x) : x \in X\})$ (l'argument pour la borne inférieure est symétrique, ou découle du résultat pour la borne supérieure appliqué à $-f$). Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $f(x_n)$ converge vers M. Comme (X, d) est compact, (x_n) admet une sous-suite convergente (x_{n_k}) ; appelons x sa limite. Alors $f(x_{n_k})$ converge à la fois vers M (c'est une sous-suite d'une suite qui converge vers M) et vers $f(x)$ (par continuité de f). Par conséquent, $f(x) = M$.

La proposition suivante est une conséquence facile de ce théorème.

Proposition 3.8. *Tout espace métrique compact (X, d) est* borné*, c'est-à-dire qu'il existe M tel que pour tout $x, x' \in X$ on ait $d(x, x') \leq M$.*

Preuve:

La fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue lorsqu'on munit $X \times X$ de la distance produit D ; en effet, elle est lipschitzienne :

$$\begin{aligned}
|d(x_1, x_2) - d(x'_1, x'_2)| &= |d(x_1, x_2) - d(x_1, x'_2) + d(x_1, x'_2) - d(x'_1, x'_2)| \\
&\leq |d(x_1, x_2) - d(x_1, x'_2)| + |d(x_1, x'_2) - d(x'_1, x'_2)| \\
&\leq d(x_2, x'_2) + d(x_1, x'_1) \\
&\leq 2D((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)).
\end{aligned}$$

Comme $(X \times X, D)$ est compact, la proposition précédente nous permet de conclure que d est bornée, ce qui revient à dire que (X, d) est un espace métrique borné.

Théorème 3.9. *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ induite par $\| \cdot \|_\infty$, les compacts sont les fermés bornés.*

Preuve:

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est tel que (A, d) soit compact, alors on sait que (A, d) doit être fermé dans $\mathbb{R}^n$, et borné d'après la proposition précédente.

Réciproquement, si A est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe M tel que A soit contenu dans $[-M, M]^n$; on a vu que cet ensemble est compact, et A y est fermé, donc (A, d) est compact.

Théorème 3.10. *Soit (X, d) un espace métrique compact, (Y, D) un espace métrique, et $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors $f(X)$ est un sous-ensemble compact de Y.*

Notons que, une fois qu'on sait que les sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, ce résultat généralise le théorème 3.7.

Preuve:

Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(X)$. Pour tout n on peut choisir x_n tel que $f(x_n) = y_n$, et ensuite on peut extraire une sous-suite convergente (x_{n_k}) de la suite (x_n). Par continuité de f, la suite $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge vers $y = f(x)$.

Théorème 3.11 (Théorème de Heine)**.** *Soit (X, d) un espace métrique compact, (Y, D) un espace métrique, et $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

Preuve:

On va montrer la contraposée : si f n'est pas uniformément continue, alors f n'est pas continue. Supposons donc que f ne soit pas uniformément continue, c'est-à-dire qu'il est faux que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X \ d(x, x') < \delta \Rightarrow D(f(x), f(x')) < \varepsilon \ .$$

Autrement dit, notre hypothèse est que

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x' \in X \ d(x, x') < \delta \text{ et } D(f(x), f(x')) \geq \varepsilon \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe x_n, x'_n tels que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et $D(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$.
Comme l'espace produit $X \times X$ est compact, on peut extraire une sous-suite convergente (x_{n_k}, x'_{n_k}) de la suite (x_n, x'_n) ; la suite x_{n_k} converge vers $x \in X$, et la suite x'_{n_k} converge vers $x' \in X$.
Puisque $n_k \to +\infty$ et $d(x_{n_k}, x'_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$, on doit avoir $x = x'$. Mais on a aussi $D(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \varepsilon$ pour tout k : il est impossible que les deux suites $f(x_{n_k})$ et $f(x'_{n_k})$ convergent vers $f(x)$, par conséquent f n'est pas continue en x.

Théorème 3.12. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Preuve:

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$; alors toutes les normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, donc elles sont toutes équivalentes.
Notons $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $M = \max(\{N(e_i) \colon 1 \leq i \leq n\})$. Alors on a, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{array}{rcl} N(x) & = & N(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) \\ & \leq & |x_1| N(e_1) + \ldots + |x_n| N(e_n) \\ & \leq & M(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ & \leq & M.n.\|x\|_\infty \ . \end{array}$$

Cela nous donne une des deux inégalités nécessaires pour montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$; cette inégalité implique aussi que $N \colon (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et donc continue :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad |N(x) - N(x')| \leq N(x - x') \leq Mn\|x - x'\|_\infty \ .$$

On a vu que les fermés bornés de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont compacts ; par conséquent, l'ensemble

$$S = \{x \in [-1,1]^n \colon \exists k, \ x_k = \pm 1\}$$

(la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$) est compact, et comme N y est continue, elle y atteint son minimum m ; notons que, comme $0 \notin S$, $m > 0$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul ; le vecteur $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à S, et on a donc $N(\frac{x}{\|x\|_\infty}) \geq m$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $m\|x\|_\infty \leq N(x)$ (cette inégalité est bien sûr aussi vraie pour $x = 0$), et on a fini de prouver que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Corollaire 3.13. Pour n'importe quelle distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

Exercice 3.14. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Définition 3.15. Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques. Une fonction $f \colon X \to Y$ est un *homéomorphisme* si f est une bijection telle que les fonctions f et f^{-1} soient continues.

Proposition 3.16. *Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques compacts, et $f \colon X \to Y$ une bijection continue. Alors f^{-1} est nécessairement continue, autrement dit, f est un homéomorphisme.*

Preuve:

On doit montrer que la fonction $g = f^{-1}$ est continue. Soit F un fermé de X ; il nous suffit de montrer que $g^{-1}(F)$ est fermé dans Y. Pour cela, notons que

$$g^{-1}(F) = \{y \in Y : g(y) \in F\} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \in F\} = f(F) \ .$$

D'après le théorème 3.10, $f(F)$ est compact ; comme les compacts sont fermés, on en déduit bien que $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé, ce qu'il fallait démontrer.