Chapitre 4

Une introduction intuitive à la mesure de Lebesgue et aux grands théorèmes de théorie de la mesure.

4.1 Mesures ; le presque partout

Définition 4.1 (première tentative de définition d'une mesure). Une mesure sur un ensemble X est une application $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ avec les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X deux à deux disjointes, c'est-à-dire si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, alors $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$.

Remarque 4.2. Ci-dessus, $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X. La définition donnée plus haut est très exigeante : en général, on ne demande pas que *toutes* les parties de X aient une mesure. Ceci amène à introduire une notion un peu plus précise (en particulier, dire quelles propriétés on attend de l'ensemble des parties qui admettent une mesure, qu'on appelle les parties *mesurables*). Dans cette partie du cours, on va prétendre que toutes les parties sont mesurables ; pour que les théorèmes présentés dans cette partie soient vraiment corrects, on va ajouter en gris les hypothèses nécessaires de mesurabilité - que vous pouvez ignorer en première lecture, et sur lesquelles vous pourrez revenir après avoir lu la suite du cours.

Définition 4.3. Comme on autorise que des parties aient une mesure infinie (intuitivement, la mesure généralise les notions de longueur/d'aire/de volume, et on « voit »bien que $\mathbb{R}$, par exemple, est de longueur infinie), il faut donner quelques précisions :

— Pour tout $t \in [0,+\infty]$, $+\infty + t = t + \infty = +\infty$.
— Pour tout t *fini*, $+\infty - t = +\infty$.
— $(+\infty) - (+\infty)$ n'est pas défini.

Dans l'énoncé des propriétés de l'intégrale, on va aussi devoir écrire des multiplications, avec les conventions suivantes :

— $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.
— Si $t > 0$, $t \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot t = +\infty$.

Proposition 4.4. *Soit μ une mesure sur un ensemble X.*

— *Si $A_0, \dots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes et mesurables, alors*

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \ .$$

— *Si $A \subseteq B$ et A et B sont mesurables alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Preuve:

Pour voir que la première propriété est vraie, il suffit de définir $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ et d'appliquer la définition d'une mesure :

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) + 0 = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \ .$$

Pour la deuxième propriété on utilise le fait que $B = A \cup (B \setminus A)$ et que $B \setminus A$ est mesurable pour écrire :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A) \ .$$

Attention : si $A \subseteq B$ et A et B sont mesurables, on a envie d'écrire $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$. Ceci peut ne pas avoir de sens, si $\mu(B \setminus A)$ est infini ! Avant d'écrire une telle égalité, il faut vérifier que $\mu(B \setminus A) < +\infty$.

Pour l'instant, on va se concentrer sur une mesure, sur un ensemble très particulier : la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.5. Il existe une unique mesure λ sur $\mathbb{R}$ (définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$), appelée *mesure de Lebesgue* et telle que pour tout segment $[a, b]$ on ait $\lambda([a, b]) = b - a$.

Remarque 4.6. Par convention, à chaque fois qu'on écrira $[a, b]$, on supposera que a, b sont des réels et $a \leq b$.

Intuitivement, $b - a$ correspond à la longueur du segment $[a, b]$; la mesure de Lebesgue permet d'associer une notion de longueur à des parties plus compliquées de $\mathbb{R}$ (au moins, à toutes les parties boréliennes).

Notons quelques conséquences immédiates de cette définition.

Proposition 4.7.
— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$.*
— *Si (x_n) est une suite de nombres réels, alors $\lambda(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$.*
— *Pour tous réels a, b avec $a \leq b$ on a $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = b - a$.*

Une idée fondamentale en théorie de la mesure est qu'on peut, la plupart du temps, *négliger* les parties de mesure nulle : elle n'ont pas d'influence sur la valeur d'une intégrale, par exemple.

Définition 4.8. Une partie borélienne $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite *négligeable* si $\lambda(A) = 0$. On dit aussi que *presque tout x* appartient à $\mathbb{R} \setminus A$, ou encore que $x \in \mathbb{R} \setminus A$ est *vrai presque partout.*

En particulier, si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes, on dit que f et g sont égales *presque partout* si $\lambda(\{x \colon f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (c'est-à-dire, si l'ensemble de tous les x tels que $f(x) \neq g(x)$ est négligeable, ou encore si $f(x) = g(x)$ pour presque tout x).

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne et nulle presque partout.

4.2 L'intégrale de Lebesgue

L'idée de base de la construction de l'intégrale de Lebesgue est la suivante : si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors on voudrait avoir $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(\{x \colon f(x) = \alpha_i\})$. Par exemple, si f est une fonction en escalier (qui est continue par morceaux et donc borélienne), cette définition nous redonne la valeur habituelle de l'intégrale de f.

Dans le cadre de la théorie de la mesure, on commence par utiliser un procédé de passage à la limite (qu'on ne détaillera pas) pour étendre la définition ci-dessus à l'intégrale de toutes les fonctions positives et mesurables ; une fois qu'on sait intégrer toutes les fonctions à valeurs positives, on peut définir facilement l'intégrale de n'importe quelle fonction mesurable. En effet, étant donnée une fonction f, on peut définir sa partie positive f^+ et sa partie négative f^- en posant

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

Alors, f^+ et f^- sont deux fonctions mesurables et à valeurs positives, et par définition $f = f^+ - f^-$. Si on sait intégrer les fonctions mesurables et à valeurs positives, il nous reste donc simplement à poser $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^- d\lambda$ (et ce processus s'applique pour toute mesure, pas seulement pour la mesure de Lebesgue).

On va admettre qu'on peut construire une notion d'intégrale ayant les propriétés suivantes :

1. Si f est la fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}$ borélienne, alors $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lambda(A)$.
2. Pour toutes fonctions boréliennes $f, g \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ et toute constante $c \geq 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} cf d\lambda = c \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \text{ et } \int_{\mathbb{R}} (f+g) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \int_{\mathbb{R}} g d\lambda \ .$$

   (En particulier, l'intégrale de la fonction nulle vaut 0.)
3. Pour toutes fonctions boréliennes $f, g \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$,

$$\text{si } f = g \text{ presque partout alors } \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

4. Pour toutes fonctions boréliennes $f, g \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$,

$$\text{si } f \leq g \text{ (presque partout) alors } 0 \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

Remarque 4.9. Il est pratique d'autoriser le fait que les fonctions prennent la valeur $+\infty$. Si $\lambda(\{x \colon f(x) = +\infty\}) > 0$, et $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est borélienne, alors on a toujours $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = +\infty$. En particulier, si $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est d'intégrale finie alors $f(x) < +\infty$ presque partout, et on peut se ramener à considérer l'intégrale d'une fonction à valeurs finies en intégrant f sur l'ensemble $\{x \colon f(x) < +\infty\}$, ce que permet la définition suivante.

Définition 4.10. Étant donnée une partie A de $\mathbb{R}$ borélienne, et $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne, on définit

$$\int_A f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_A d(\lambda) \ .$$

(En particulier, pour toute constante $c \geq 0$, $\int_A c d\lambda = c\lambda(A)$.)

Remarque 4.11. $\mathbf{1}_A$ désigne la *fonction caractéristique* de A, c'est-à-dire que $\mathbf{1}_A(x)$ vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon. C'est une fonction borélienne si, et seulement si, A est borélien. Ainsi, $f\mathbf{1}_A$ est la fonction qui est égale à f sur A, et à 0 ailleurs.

Proposition 4.12.
5. *Si A est borélien et $\lambda(A) = 0$ alors $\int_A f d\lambda = 0$ pour toute fonction $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne.*
6. *Si A_1, A_2 sont des parties de $\mathbb{R}$ boréliennes et disjointes, alors pour toute fonction $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne, on a*

$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\lambda = \int_{A_1} f d\lambda + \int_{A_2} f d\lambda \ .$$

Exercice 4.13. Déduire des propriétés énoncées plus haut que si A_1, A_2 sont des parties de $\mathbb{R}$ boréliennes et telles que $\lambda(A_1 \cap A_2) = 0$, alors pour toute fonction $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ borélienne, on a

$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\lambda = \int_{A_1} f d\lambda + \int_{A_2} f d\lambda \ .$$

Remarque 4.14. Pour intégrer une fonction à valeurs positives sur une partie A, il suffit qu'elle soit au moins définie sur A : si $f \colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne et A une partie borélienne de X, on définit $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$ où g est un (n'importe quel) prolongement borélien de f à $\mathbb{R}$ (par exemple g définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in X$ et $g(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus X$).

Attention : on peut définir l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ pour *toute* fonction borélienne f à valeurs positives ; *mais cette intégrale peut valoir $+\infty$*. Une idée intuitive est que, dans le cas d'une fonction à valeurs positives, l'intégrale de f coïncide avec « l'aire sous la courbe représentative de f » ; et cette aire peut éventuellement être infinie : par exemple, si f est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, alors le domaine limité par le graphe de f et l'axe des abscisses est un « rectangle »dont un côté est de longueur 1 est l'autre de longueur infinie, et on voit bien que l'aire d'un tel domaine est infinie. Mais si f change de signe, alors la notion d'« aire sous la courbe »devient plus compliquée à interpréter.

Définition 4.15. Soit $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On dit que f est *intégrable* sur une partie A borélienne de X si $\int_A |f| d\lambda < +\infty$.

Dans ce cas,f^+ et f^- sont également intégrables sur A (par la propriété (4)) et on définit $\int_A f d\lambda = \int_A f^+ d\lambda - \int_A f^- d\lambda$.

Attention, dans le cadre de la théorie de Lebesgue, on définit $\int_A f d\lambda$ uniquement quand f est *intégrable* sur A (c.à.d. $\int_A |f| d\lambda < +\infty$) et on ne considère pas les intégrales généralisées semi-convergentes qui apparaissent dans la théorie de l'intégrale de Riemann (voir la première feuille de TD).

On retrouve les propriétés (1), (2), (3), (4), (5), (6) ci-dessus qui sont cette fois vraies pour des fonctions boréliennes intégrables.

Proposition 4.16. *Pour toutes fonctions boréliennes $f, g\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables sur une partie borélienne $A \subseteq X$ on a*

1. $\int_A 1 d\lambda = \lambda(A)$ *;*
2. *pour toutes constantes réelles α et β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est également intégrable sur A et*
$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\lambda = \alpha \int_A f d\lambda + \beta \int_A g d\lambda \text{ (linéarité de l'intégrale);}$$
3. *si $f = g$ presque partout, alors* $\int_A f d\lambda = \int_A g d\lambda$ *;*
4. *si $f \geq 0$ presque partout, alors* $\int_A f d\lambda \geq 0$ (positivité de l'intégrale) *;*
   si $f \leq g$ presque partout, alors $\int_A f d\lambda \leq \int_A g d\lambda$ (monotonie de l'intégrale) *;*
5. *si $\lambda(A) = 0$ alors* $\int_A f d\lambda = 0$ *;*
6. *si A_1, A_2 sont des parties boréliennes de A telles que $\lambda(A_1 \cap A_2) = 0$, alors*
$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\lambda = \int_{A_1} f d\lambda + \int_{A_2} f d\lambda \ .$$

On a de plus

7. L'inégalité triangulaire
$$\left| \int_A (f+g) d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda + \int_A |g| d\lambda \ .$$

4.3 Théorèmes d'échanges limite-intégrale

La théorie de Lebesgue nous permet d'intégrer plus de fonctions que la théorie de Riemann. Cela simplifie l'énoncé des théorèmes d'échange limite/intégrale, qui sont plus puissants dans ce contexte.

Théorème 4.17 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ borélienne et $f_i\colon A \to [0, +\infty[$ une suite de fonctions boréliennes telle pour presque tout $x \in A$ la suite $(f_i(x))$ soit une suite croissante. Alors il existe une fonction borélienne $f\colon A \to [0, +\infty]$ telle que $f_i(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout, et on a*
$$\lim_{i \to +\infty} \int_A f_i d\lambda = \int_A f d\lambda \ .$$

Remarque 4.18. Comme, pour presque tout x, la suite $(f_i(x))$ est croissante, il est immédiat que cette suite admet une limite dans $[0, +\infty]$. Ainsi, l'existence de la fonction f est une conséquence immédiate de l'hypothèse de monotonie. Ce qui n'est pas trivial, c'est de pouvoir échanger limite et intégrale !

Attention : l'hypothèse du théorème *n'est pas* que les fonctions f_i sont des fonctions croissantes ; c'est que, pour presque tout x *fixé*, la suite $(f_i(x))$ est une suite croissante.

Remarque 4.19. Comme on ne travaille dans cette partie qu'avec la mesure de Lebesgue, on n'a écrit ce théorème que pour la mesure de Lebesgue ; mais il serait vrai aussi pour toute autre mesure (en remplaçant « borélien »par « mesurable ») ; il en va de même de la définition de l'intégrale qu'on a vue plus haut, et du théorème de convergence dominée qu'on va maintenant présenter.

L'avantage de ce théorème est qu'il s'applique même si la suite des intégrales tend vers $+\infty$; mais l'hypothèse demandant que les fonctions soient à valeurs positives, et que la suite $(f_i(x))$ soit croissante pour presque tout x, n'est souvent pas vérifiée dans les exemples. Néanmoins, à partir de ce théorème on peut déduire un autre théorème fondamental.

Théorème 4.20 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ borélienne, et $f_i\colon A \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions boréliennes et satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. *Pour presque tout x, la suite $f_i(x)$ est convergente vers une limite qu'on appelle $f(x)$ (alors f est borélienne).*
2. *Il existe une fonction $g\colon A \to \mathbb{R}$ borélienne à valeurs positives, telle que pour presque tout x on ait $|f_i(x)| \leq g(x)$ et $\int_A g d\lambda < +\infty$.*

Alors f est intégrable, et on a

$$\int_A f d\lambda = \lim_{i \to +\infty} \int_A f_i d\lambda \ .$$

Remarque 4.21. Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, il est fondamental que *la fonction g ne dépend pas de i.*

En appliquant les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée sur les sommes partielles d'une suite de fonctions, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.22 (Échanges série/intégrale)**.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$ borélienne.

1. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions positives boréliennes définies sur A, alors

$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \ d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A f_n d\lambda \qquad \text{(convergence monotone).}$$

2. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions boréliennes définies sur A telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_A |f_n| d\lambda < +\infty$$

alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour presque tout $x \in A$ vers une fonction f intégrable, et on a

$$\int_A f d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A f_n d\lambda \qquad \text{(convergence dominée).}$$

Remarque 4.23. La théorie de l'intégrale de Cauchy-Riemann est basée sur la stratégie suivante : d'abord, on définit l'intégrale des fonctions en escalier (qui coïncide avec leur intégrale pour la mesure de Lebesgue). Ensuite, on utilise le fait que toute fonction continue par morceaux f définie sur un segment I est une limite uniforme de fonctions en escalier f_i, et on définit $\int_I f(x)dx = \lim_{i \to +\infty} \int_I f_i(x)dx$.

Comme toute suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée par une constante M, et que les fonctions constantes sont intégrables sur les segments, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que $\int_I f d\lambda = \lim \int_I f_i d\lambda$. Ainsi, on déduit que, pour une fonction continue par morceaux, son intégrale au sens de Riemann et son intégrale au sens de Lebesgue coïncident.

En utilisant le théorème de convergence monotone, on en déduit que l'intégrale généralisée au sens de Riemann d'une application continue positive sur un intervalle ouvert est égale à son intégrale au sens de Lebesgue. Enfin, une fonction continue qui a une intégrale généralisée absolument convergente au sens de Riemann, est également intégrable au sens de Lebesgue et à nouveau par le théorème de convergence dominée, ces intégrales coïncident. Plus précisément :

Théorème 4.24 (Comparaison avec l'intégrale de Riemann)**.** *Les intégrales au sens de Riemann et au sens de Lebesgue coïncident (en particulier) dans les situations suivantes :*

1. *Si $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors f est intégrable au sens de Riemann et au sens de Lebesgue, et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

2. *Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\to [0,+\infty[$ est une fonction continue par morceaux, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

(Rappelons que ces intégrales peuvent valoir $+\infty$.)

3. *Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux dont l'intégrale généralisée au sens de Riemann est absolument convergente, c'est-à-dire telle que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

4.4 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètres

Dans cette section, on fixe une partie X borélienne de $\mathbb{R}$, et I un intervalle. Étant donnée une fonction $f \colon X \times I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$ $x \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur X, on peut définir la fonction $F \colon t \mapsto \int_X f(x,t)d\lambda(x)$. On s'intéresse à des hypothèses sur f permettant de conclure que F est continue, ou dérivable.

Théorème 4.25 (Théorème de continuité des intégrales à paramètres)**.** *Soit $f \colon X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.*
2. *Il existe une fonction $g \colon X \to [0,+\infty[$ intégrable et telle que pour tout $t \in I$ on ait $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.*
3. *Pour tout t la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est borélienne.*

Alors la fonction $F \colon t \mapsto \displaystyle\int_X f(x,t)d\lambda(x)$ est bien définie et continue sur I.

Remarque 4.26. Dans la deuxième condition ci-dessus, *la fonction g ne dépend pas de t*. Dans les applications, il n'est pas toujours facile de trouver une fonction g satisfaisant les conditions du théorème ! La première condition est, elle, normalement facile à vérifier.

Preuve:

Déjà, notons que, pour tout t fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est borélienne et telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$; comme g est intégrable, on en déduit que $\int_X |f(x,t)|d\lambda(x) \leq \int_X g(x)d\lambda(x) < +\infty$, donc la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable, et F est donc bien définie.

Fixons maintenant $t \in I$. Pour montrer que F est continue en t, on doit vérifier que, pour toute suite (t_n) d'éléments de I qui converge vers t, la suite $F(t_n)$ converge vers $F(t)$. Fixons donc une telle suite (t_n). Par définition, on a $F(t_n) = \displaystyle\int_X f(x,t_n)d\lambda(x)$.

La première hypothèse ci-dessus nous permet d'affirmer que la suite de fonctions $f_n \colon x \mapsto f(x,t_n)$ est une suite de fonctions boréliennes et telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x,t)$ pour presque tout $x \in X$; et on a aussi $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout x. Comme g est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)d\lambda(x) = \int_X f(x,t)d\lambda(x) \ .$$

On vient de montrer que $F(t_n) = \int_X f_n(x)d\lambda(x)$ converge vers $F(t)$, ce qui prouve que F est bien continue en t.

Remarque 4.27. En regardant la preuve, on voit que si, dans les hypothèses du théorème, on avait remplacé « pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I »par « pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue en un certain $t_0 \in I$ »(en laissant les autres hypothèses inchangées), alors on aurait pu conclure que F est continue en t_0.

Par ailleurs, notons que si X et I sont des segments, et f est une fonction continue, alors f est bornée, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $|f(x,t)| \leq M$ pour tout $(x,t) \in X \times I$. Comme les fonctions constantes sont intégrables sur les segments, on voit qu'on peut poser $g(x) = M$ et appliquer le théorème de continuité : si X et I sont des segments, et f est une fonction continue des deux variables (x,t), alors F est continue. Ce corollaire du théorème de continuité peut se démontrer simplement sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Théorème 4.28 (Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres)**.** *Soit $f \colon X \to I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

1. *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur X.*
2. *Pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I (on note sa dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$).*
3. *Il existe une fonction $g \colon X \to [0,+\infty[$ intégrable et telle que pour tout $t \in I$ et tout $x \in X$ on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$.*
4. *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est borélienne.*

Alors la fonction $F \colon t \mapsto \displaystyle\int_X f(x,t)d\lambda(x)$ est bien définie sur I, dérivable, et on a pour tout $t \in I$ que

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\lambda(x) \ .$$

Remarque 4.29. En fait, le théorème reste vrai si l'on remplace la première hypothèse par le fait qu'il existe un $t \in I$ tel que $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (bien sûr, on doit toujours supposer que cette fonction est borélienne pour tout $t \in I$).

Remarque 4.30. Si on ajoute l'hypothèse selon laquelle la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue sur I pour presque tout $x \in X$, alors le théorème de continuité des intégrales à paramètres nous permet de conclure que F' est continue sur I, c'est-à-dire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Preuve:

Fixons $t \in I$. Pour vérifier que F est dérivable en t, on doit étudier le taux d'accroissement de F en t ; fixons donc une suite (t_n) d'éléments de I différents de t, et considérons le taux d'accroissement

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\lambda(x) \ .$$

Comme dans la preuve du théorème de continuité, considérons la suite de fonctions $f_n \colon x \mapsto \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$. Le fait que $t \mapsto f(x,t)$ soit dérivable en t pour presque tout $x \in X$ nous dit que $f_n(x)$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ pour presque tout $x \in X$. De plus, l'inégalité des accroissements finis nous dit que, pour presque tout $x \in X$, on a

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| \leq \sup_{s \in [t_n,t]} \frac{\partial f}{\partial t}(x,s) \leq g(x) \ .$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite f_n pour conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n(x)d\lambda(x) = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)d\lambda(x) \ .$$

Autrement dit, on a montré que $\dfrac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t}$ converge vers $\displaystyle\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\lambda(x)$ quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que F est dérivable en t et $F'(t) = \displaystyle\int_X \lim_{n \to +\infty} f_n(x)d\lambda(x)$.