L3 : Mathématiques et Économie **6 novembre 2019**
2019–2020

Examen partiel : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 2 heures

LES DOCUMENTS ET LES GADGETS ÉLECTRONIQUES NE SONT PAS AUTORISÉS
LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES
Un barème est donné à titre indicatif. (il est donc susceptible de changer).

Questions de cours : (6 points)

1. Formuler le théorème de convergence monotone.
2. Formuler le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
3. Énoncer la caractérisation topologique de la continuité d'une fonction.
4. Formuler l'inégalité des pentes pour une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 (10 points) Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq n\}.$$

1. Montrer que $A_n \in \mathcal{T}$.
2. On se propose de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f|^n d\mu$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_1} |f|^n d\mu$.
   (Indication : notez que $A_1 = \{x \in \Omega : |f(x)| = 1\} \sqcup \{x \in \Omega : |f(x)| > 1\}$.)
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_1^c} |f|^n d\mu$.
   (c) Conclure.
3. On se propose de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu$.
   (a) Montrer que $A_n \supset A_{n+1}$. Puis, trouver $\bigcap\limits_n A_n$.
   (b) Soit
   $$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_n, \\ |f(x)| & \text{si } x \in A_n. \end{cases}$$
   Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} g_n$ et montrer que $g_n \leq |f|$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n d\mu$.
   (d) Conclure.

Exercice 2 (10 points) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels en X.

On rappelle qu'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ donne lieu à une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ peut dépendre de f. Si dans l'écriture ci-dessus, on a $a_n \neq 0$, alors on dit que le degré de f est n et on écrit $\deg(f) = n$.

Pour tous $\alpha > 0$ et $f \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \int_0^\alpha |f(x)|dx.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour $f \in \mathbb{R}[X]$, la fonction N_f définie par $N_f(\alpha) = \|f\|_\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Est-ce que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ? (justifier !)
4. Pour chaque $\alpha > 0$, déterminer les $\beta > 0$ pour lesquels $\|\cdot\|_\beta$ est équivalente à $\|\cdot\|_\alpha$.
5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne $\mathbb{R}[X]_n = \{f \in \mathbb{R}[X] : \deg f \leq n\}$.
   Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_n$? (justifier !)
6. Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\|\cdot\|_{\alpha,n}$ la restriction de $\|\cdot\|_\alpha$ sur $\mathbb{R}[X]_n$. Si $\alpha > 0$ déterminer les $\beta > 0$ pour lesquels la norme $\|\cdot\|_{\beta,n}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\alpha,n}$.