L3 : Mathématiques et Économie **6 novembre 2019**
2019–2020

Examen partiel : Topologie et théorie de la mesure

Correction

Questions de cours : (6 points) (voir cours)

Exercice 1 (10 points) Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \{x \in \Omega : |f(x)| \geq n\}.$$

1. (1 point) Montrons que $A_n \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire A_n est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Il suffit de noter que $g = |f|$ est mesurable comme composée de f intégrable donc mesurable, et de la valeur absolue, fonction continue donc borélienne. Ensuite $A_n = g^{-1}([n, +\infty[)$ est mesurable comme image réciproque de l'intervalle fermé $[n, +\infty[$ (qui est donc fermé donc borélien) par l'application mesurable g.
2. On se propose de calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f|^n d\mu$.

   (a) (1,5 points) Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_1} |f|^n d\mu$.

   Posons $A_{1,0} = \{x \in \Omega : |f(x)| = 1\}, A_{1,1} = \{x \in \Omega : |f(x)| > 1\}$.
   On a donc l'union disjointe : $A_1 = A_{1,0} \sqcup A_{1,1}$ et donc

   $$\int_{A_1} |f|^n d\mu = \int_{A_{1,0}} |f|^n d\mu + \int_{A_{1,1}} |f|^n d\mu$$

   Or vu la valeur de $|f| = 1$ sur $A_{1,0}$:

   $$\int_{A_{1,0}} |f|^n d\mu = \int_{A_{1,0}} 1^n d\mu = \mu(A_{1,0}).$$

   Par contre, si $x > 1$, x^n est croissante de limite $+\infty$, donc sur $A_{1,1}$ $|f|^n$ est une suite croissante de fonctions positives, donc par le théorème de convergence monotone :

   $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{1,1}} |f|^n d\mu = \int_{A_{1,1}} (+\infty) d\mu = (+\infty)\mu(A_{1,1}).$$

   Attention, cela vaut 0 si $\mu(A_{1,1}) = 0$, et $+\infty$ sinon.
   En prenant la somme, on obtient que

   $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_1} |f|^n d\mu = \begin{cases} +\infty & si\ \mu(A_{1,1}) > 0 \\ \mu(A_{1,0}) & si\ \mu(A_{1,1}) = 0 \end{cases}$$

(b) (1,5 points) Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{A_1^c}|f|^n d\mu$.

pour $x\in A_1^c$, on a $|f(x)|<1$, donc $|f(x)|^n\leq|f(x)|$ ce qui donne une domination par $|f|$ intégrable (attention $1_{A_1^c}$ n'est pas forcément intégrable, penser à $\Omega=\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$, $A_1^c=]0,+\infty[$) et $|f(x)|^n\to 0$. Donc par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_1^c}|f|^n d\mu=\int_{A_1^c}0d\mu=0$$

(c) (1 point) Comme A_1, A_1^c sont disjoints :

$$\int|f|^n d\mu=\int_{A_1}|f|^n d\mu+\int_{A_1^c}|f|^n d\mu$$

et la limite est la somme des limites des deux dernières questions :

$$\lim_{n\to\infty}\int|f|^n d\mu=\begin{cases}+\infty & si\ \mu(A_{1,1})>0\\ \mu(A_{1,0}) & si\ \mu(A_{1,1})=0\end{cases}$$

3. On se propose de calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{A_n}fd\mu$.

(a) (1 point) Montrons que $A_n\supset A_{n+1}$. En effet, soit x telle que $|f(x)|\geq n+1$ on a aussi $|f(x)|\geq n$ (vu n+1>n) donc $A_{n+1}\subset A_n$.
Montrons ensuite par l'absurde que $\bigcap\limits_n A_n=\emptyset$.
En effet, sinon, soit $x\in\bigcap\limits_n A_n$ donc $|f(x)|\geq n$ pour tout n, on obtient, en passant à la limite $n\to\infty$, que $|f(x)|=+\infty$. Mais f est à valeur dans $\mathbb{R}$, donc un tel x n'existe pas.

(b) (1 point) Soit

$$g_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin A_n,\\ |f(x)| & \text{si } x\in A_n.\end{cases}$$

On doit trouver la limite simple $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=0$.
En effet, $\Omega=\bigcup\limits_n A_n^c$ par la question précédente, donc pour tout $x\in\Omega$, il existe un n tel que $x\in A_n^c\subset A_m^c, m>n$ et alors $g_m(x)=0$ pour tout $m\geq n$. Donc la suite $g_n(x)$ est constante égale à 0 à partir d'un certain rang et donc converge vers 0.
L'inégalité $g_n(x)\leq|f|(x)$ se montre en distinguant les deux cas de la définition vu $0\leq|f|(x)$ et $|f|(x)\leq|f|(x)$.

(c) (1,5 points) On a montrer la domination $|g_n|\leq|f|$ avec f intégrable par hypothèse, donc le théorème de convergence dominée (TCD) donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu=\int\lim_{n\to\infty}g_n d\mu=0.$$

(d) (1,5 points) Par l'inégalité triangulaire des intégrales, on a :

$$\left|\int_{A_n} f d\mu\right| = \left|\int f 1_{A_n} d\mu\right| \leq \int |f| 1_{A_n} d\mu = \int g_n d\mu \to_{n\to\infty} 0.$$

D'où la limite $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0$.

Une autre méthode consiste à réappliquer le TCD à $f 1_{A_n}$ qui tend vers 0 (comme g_n) et est dominée par $|f 1_{A_n}| \leq |f|$ (intégrable) comme avant.

Exercice 2 (10 points) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels en X.

On rappelle qu'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ donne lieu à une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ peut dépendre de f. Si dans l'écriture ci-dessus, on a $a_n \neq 0$, alors on dit que le degré de f est n et on écrit $\deg(f) = n$.

Pour tous $\alpha > 0$ et $f \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \int_0^\alpha |f(x)| dx.$$

1. (2 points) Montrons que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Tout d'abord, $||f||_\alpha$ est positive comme intégrale d'une fonction positive. De plus, f est polynômiale donc continue, donc bornée sur le compact $[0, \alpha]$, disons par $C_{f,\alpha}$ et donc $\|f\|_\alpha \leq \alpha C_{f,\alpha} < +\infty$ donc $\|\cdot\|_\alpha$ est bien à valeur $\mathbb{R}_+$. On montre les trois autres axioms :
   (1) séparation (c'est le plus dur) : Si $\int_0^\alpha |f(x)| dx = 0$ alors $f(x) = 0$ λ-pp sur $[0, \alpha]$. Comme f est continue, on déduit donc $f(x) = 0$ sur $[0, \alpha]$. Il reste à voir que les coefficients a_k sont tous nuls (c'est cela l'annulation du polynôme). Méthode 1 : Un polynôme non nul n'a que $n = deg(f)$ racines, donc l'annulation sur $[0, \alpha]$ infini implique que $f = 0$.
   Méthode 2 : On dérive à droite en 0 et on remarqie que $f_d^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k x^{k-m} \frac{k!}{(k-m)!}$ donc $f_d^{(m)}(0) = m! a_m$. Ici, la restriction à $[0, \alpha]$ s'annule donc $f_d^{(m)}(x) = 0$ sur $[0, \alpha[$ et donc $0 = f_d^{(m)}(0) = m! a_m$. Tous les a_m sont donc nuls et donc $f = 0$.
   (2) (homogénéité) : On utilise que la valeur absolue est positivement homogène à la première égalité et la linéarité de l'intagrale à la deuxième :

$$\|\lambda f\|_\alpha = \int_0^\alpha |\lambda| |f(x)| dx = |\lambda| \int_0^\alpha |f(x)| dx.$$

   (3) (inégalité triangulaire) : La première ingalité vient de l'intégration de l'inégalité triangulaire $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ pour la valeur absolue et la deuxième de la linéarité de l'intégrale :

$$\|f+g\|_\alpha = \int_0^\alpha |f(x)+g(x)| dx \leq \int_0^\alpha |f(x)|+|g(x)| dx = \int_0^\alpha |f(x)| dx + \int_0^\alpha |g(x)| dx.$$

2. (1 point) Montrons que pour $f \in \mathbb{R}[X]$, la fonction N_f définie par $N_f(\alpha) = \|f\|_\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Il suffit de prendre $\alpha \leq \beta$ et d'utiliser la relation de Chasles et la positivité d'une intégrale de fonction positive :

$$N_f(\beta) = \int_0^\alpha |f(x)|dx + \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \geq \int_0^\alpha |f(x)|dx = N_f(\alpha).$$

3. (2 points)Est-ce que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ? Non, on prend $f_n(x) = x^n$ calcule $\|f_n\|_1 = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$ et $\|f_n\|_2 = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} \to_{n\to\infty} +\infty$.

   Si on avait une inégalité $\|f\|_1 \geq c||f||_2$, on aurait en passant à la limite $c \leq \|f_n\|_1/||f_n||_2 \to 0$ donc $c = 0$. Or il faut $c > 0$ pour que les normes soient équivalentes, donc ce n'est pas le cas.

4. (1 point) Pour chaque $\alpha > 0$, montrons qu'il n'y aucun $\beta \neq \alpha, \beta > 0$ pour lesquels $\|\cdot\|_\beta$ est équivalente à $\|\cdot\|_\alpha$.

   Par échange de α, β, on peut supposer $\alpha < \beta$, et on prend $f_n(x) = (x/\alpha)^n$.

   $\|f_n\|_\alpha = [\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha^n}]_0^\alpha = \frac{\alpha}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$ mais

$$\|f_n\|_\beta = [\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}]_0^\beta = \frac{(\beta/\alpha)^{n+1}}{(n+1)\alpha} \to_{n\to\infty} +\infty$$

   car $\beta/\alpha > 1$. Donc $\|f_n\|_\alpha/\|f_n\|_\beta \to 0$ donc les normes ne sont pas équivalentes.

5. (2 points) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne $\mathbb{R}[X]_n = \{f \in \mathbb{R}[X] : \deg f \leq n\}$.

   Montrons que la dimension $dim(\mathbb{R}[X]_n) = n+1$? Par définition $(1, x, ..., x^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]_n$ (tout polynôme de degré inférieur à n est combinaison linéaire de ces $n+1$ monômes.)

   Il suffit de montrer que la famille est libre. C'est à dire si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ alors tous les $a_k = 0$. Mais l'hypothèse implique $f(x) = 0$ sur $[0, \alpha]$ et on a déjà montrer à la question 1 (1) que cela implique $f = 0$ c'est à dire $a_k = 0$ pour tout k.

   $(1, x, ..., x^n)$ est donc une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}[X]_n$, donc une base, son cardinal, $n+1$ est donc la dimension.

6. (2 points) Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\|\cdot\|_{\alpha,n}$ la restriction de $\|\cdot\|_\alpha$ sur $\mathbb{R}[X]_n$. Si $\alpha > 0$, pour montrer que pour tout $\beta > 0$ la norme $\|\cdot\|_{\beta,n}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\alpha,n}$, il suffit d'utiliser le résultat du cours qui dit qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.