2017/2018 | Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I | Topologie et Théorie de la mesure

Partiel- Vendredi 17 novembre 2017

Durée 2h.

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit (X, d) un espace métrique.

1. Donner une caractérisation des parties fermées de X, utilisant les suites.
2. Rappeler la définition d'une partie compacte de X.
3. Supposons X compact. Montrer que toute partie fermée de X est compacte.

Exercice 2 (Un calcul de l'intégrale de Gauss)**.** On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}_+$ est l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et
$$\int_0^{+\infty} f(x, t)dx \leq \frac{\pi e^{-t}}{2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on note F la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t)dx. \end{aligned}$$

2. Que vaut F en 0 ?
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
6. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$,
$$F'(t) = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
8. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)dt = -2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^2$.
9. En utilisant F, conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$,
$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y - x|}.$$
3. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.