2017/2018 — Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I — Topologie et Théorie de la mesure

Partiel- Vendredi 17 novembre 2017 - Corrigé

(Les arguments en gris n'étaient pas exigibles)

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Soit (X, d) un espace métrique.

1. Donner une caractérisation des parties fermées de X, utilisant les suites.

   Une partie A de X est fermée si et seulement pour toute suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers un élément x de X, alors x appartient à A.

2. Rappeler la définition d'une partie compacte de X.

   Une partie A de X est compacte si pour toute suite (x_n) d'éléments de A, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un élément de A.

3. Supposons X compact. Montrer que toute partie fermée de X est compacte.

   Soit A une partie fermée de X. Soit (x_n) une suite d'éléments de A. Comme X est compact et (x_n) est aussi une suite d'éléments de X, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $x \in X$; comme A est fermé, $x \in A$, ce qui montre que (x_n) a une sous-suite qui converge vers un élément de A. Cette propriété est ainsi vérifiée pour toute suite d'éléments de A, donc A est compacte.

Exercice 2 (Un calcul de l'intégrale de Gauss)**.** On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2} \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}_+$ est l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)dx \leq \frac{\pi e^{-t}}{2}.$$

   Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}$ est continue (donc borélienne), positive et majorée par la fonction $x \to \dfrac{e^{-t}}{1+x^2}$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)dx = \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-t}}{2} < +\infty$$

   *et en particulier $x \to f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. (Rappelons qu'une fonction mesurable est par définition intégrable si l'intégrale de sa valeur absolue est **finie**.)*

Pour la suite de l'exercice, on note F la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)dx. \end{aligned}$$

2. Que vaut F en 0 ?

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

D'après la première question, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq F(t) \leq \dfrac{\pi e^{-t}}{2}$. En passant à la limite, on en déduit que F tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

4. Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Si on note g la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est majorée par g. Enfin, on a déjà remarqué que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue et donc en particulier borélienne.

Les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres sont vérifiées et la fonction F est ainsi continue sur $\mathbb{R}_+$.

5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

   (a) *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a vu précédemment que la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

   (b) *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -e^{-t(1+x^2)}.$$

   (c) *Soit un réel $a > 0$. Pour tout $t \in [a, +\infty[$ fixé, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq e^{-tx^2} \leq e^{-ax^2}.$$

   De plus, la fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que pour tout $a > 0$, la fonction F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour tout $t \in [a, +\infty[$, $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$. Comme ceci est vrai sur tout intervalle $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, c'est donc vrai sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

6. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$F'(t) = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Soit $t \in]0, +\infty[$. Par la question précédente,

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -e^{-t(1+x^2)} dx = -e^{-t} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx.$$

À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}x$, on obtient immédiatement le résultat demandé.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Ce résultat suit du changement de variable $u = \sqrt{t}$.

8. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)dt = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right)^2$.

$$\int_0^{+\infty} F'(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right)dt = -\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right)^2.$$

9. En utilisant F, conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.

On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(0) = -\pi/2$. *Par la question précédente, on obtient ainsi* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$. *Enfin par parité de la fonction* $u \mapsto e^{-u^2}$, *on conclut* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Soit a *et* b *positifs ou nuls. On a* $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq a+b$. *Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit que* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.

2. En déduire que pour tout $(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,
$$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|y-x|}.$$
Soit $(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$. *Supposons tout d'abord* $y \geq x$. *Alors,* $\sqrt{y} = \sqrt{(y-x)+x} \leq \sqrt{y-x}+\sqrt{x}$, *d'où*
$$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| = \sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x} = \sqrt{|y-x|}.$$
Sinon $x > y$ *et alors en utilisant le cas précédent,*
$$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| = \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|}.$$

3. Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.
Soit $\varepsilon > 0$. *Posons* $\delta = \varepsilon^2$. *On a pour tout* x *et tout* x' *dans* $[0,+\infty[$, *si* $|x'-x| < \delta$ *alors* $\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|x'-x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$. *Ainsi, la fonction racine carrée est uniformément continue sur* $[0,+\infty[$.

4. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0,+\infty[$.
Supposons par l'absurde que la fonction racine carrée est K*-lipschitzienne sur* $[0,+\infty[$ *pour un réel* $K > 0$. *On aurait alors en particulier la propriété suivante : pour tout* $x > 0$, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{0}\right| \leq K|x-0|$ *et donc pour tout* $x > 0$, *l'inégalité* $1/\sqrt{x} \leq K$, *ce qui est impossible car* $1/\sqrt{x}$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $x \to 0^+$.