2016/2017 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Deuxième session - Mercredi 21 juin 2017

Durée 2h.

Documents et téléphones portables sont interdits. Une attention particulière sera portée à la rédaction lors de la correction.

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Donner la définition d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, puis d'une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.
2. Dans cette question, on considère un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que
   $$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) .$$
   (Indication : on pourra introduire $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Montrer que, si on suppose de plus $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a
   $$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) .$$

Exercice 2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + (\sin(x))^n)dx .$$

Exercice 3.

1. On introduit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^3 \leq 1\}$. Montrer que F est fermé. Est-il compact ?
2. Mêmes questions pour $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^3 \leq 1\}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_K x^2y^2 d\lambda_2$ et $\displaystyle\int_F x^2y^2 d\lambda_2$, où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.