feuille 7b : 7 et 14

feuille 7c : 1, 3, 6, 12 (a b c f).

exo 7 : les racines n ième de l'unité $\left\{e^{\frac{i2k\pi}{n}},\ k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$

si $n \neq 1$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\ldots) = \frac{1-1}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$

si $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} e^{\frac{2ik\pi}{1}} = 1$.

2) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k}$

$= e^{\frac{2i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi n - i\pi}$

$= (-1)^{n-1}$

3) $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k = \frac{1-(\omega^j)^n}{1-\omega^j}$ si $\omega^j \neq 1$.

Si $\omega^j \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = \frac{1-e^{\frac{2i\pi}{n} j n}}{1-\omega^j} = 0$$

Si $\omega^j = 1$, $e^{\frac{2i\pi}{n} j} = 1$

$j \in \{0, \dots, n\}$, $j = 0$ ou n

Si $j = 0$ ou n, $\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\omega^k)^j$$

1^{n-j}

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k$$

$(\omega^k)^j \ (\omega^j)^k$

$$= \binom{n}{0} n + \binom{n}{n} n = 2n$$

$$(\omega^k)^j = \omega^{kj} = (\omega^j)^k$$

<u>exo 14</u>

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) \qquad \mathrm{Im}\left(\ \_\_\_\_\ \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k$$

$$= \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} \quad \text{si } e^{i\theta} \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta(n+1)}{2}} - e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{\frac{i\theta n}{2}} \frac{\left(-2i\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{i\theta n}{2}} \frac{\sin\left(\theta\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\theta n}{2}\right)\sin\left(\theta\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\theta n}{2}\right)\sin\left(\theta\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

---

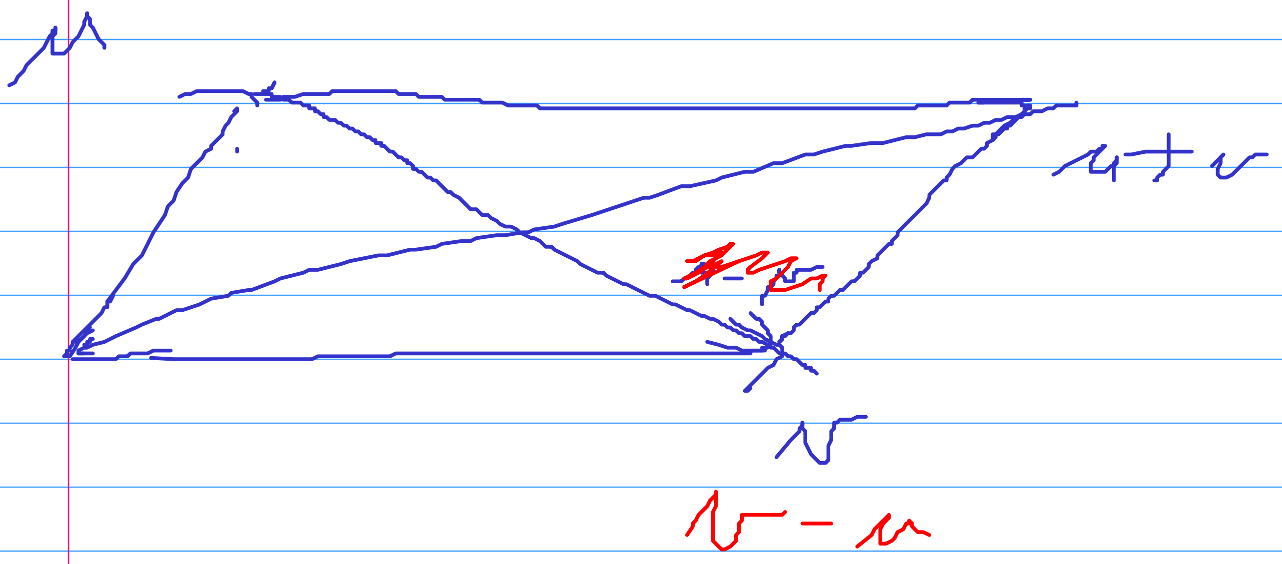
exercices 1, 6 feuille 7 C.

Exo 1 : $|u|^2 = u\bar{u}$

$$|u+v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v})$$
$$= u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + \bar{u}v$$

$$|u-v|^2 = (u-v)(\bar{u}-\bar{v})$$
$$= u\bar{u} + v\bar{v} - u\bar{v} - \bar{v}u$$

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2u\bar{u} + 2v\bar{v}$$
$$= 2|u|^2 + 2|v|^2$$



exo 6 :

Similitude directe

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az + b$$

$a, b \in \mathbb{C}$.

si $a = 1$, f est une translation de vecteur $\vec{b}$.

si $|a| = 1$ et $a \neq 1$

alors $a = e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi[$,

f est une rotation de centre z_0 qui est le pt fixe de f, $f(z_0) = z_0$

si $|a| \neq 1$, $a = r e^{i\theta}$, $r > 0$

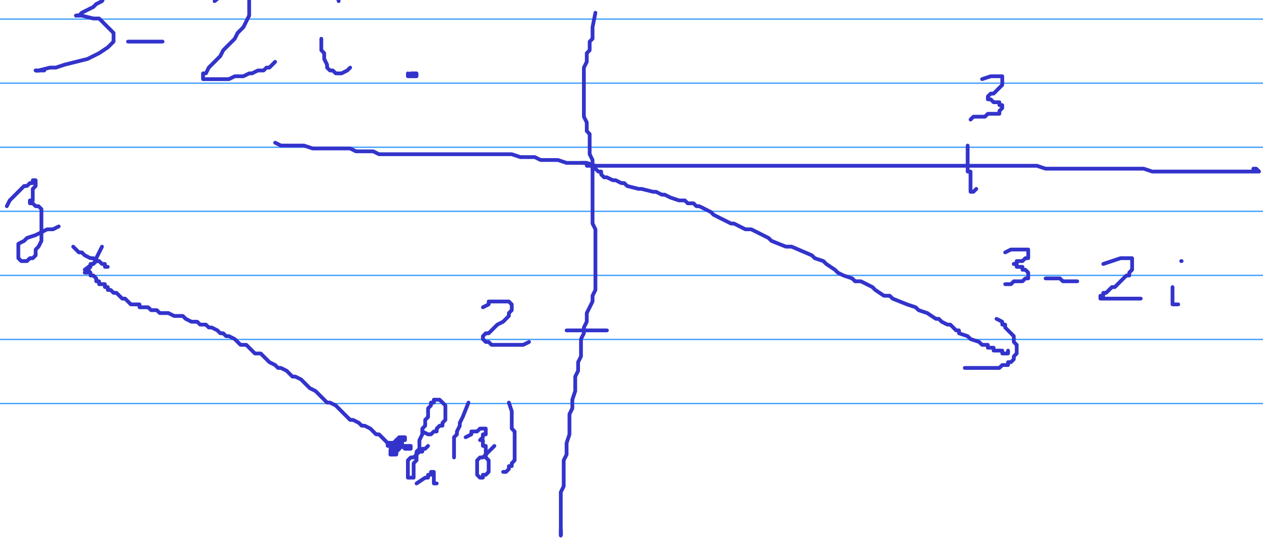
et $\theta \in [0, 2\pi[$, $a \neq 0$

f est la composition d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport r. Le centre de ces deux transformation est toujours le point fixe de f.

exo 6 question 1

a) $f_1(z) = z + 3 - 2i$

f_1 est une translation de vecteur $3 - 2i$.



b) : $f_2(z) = e^{\frac{2i\pi}{7}} z$

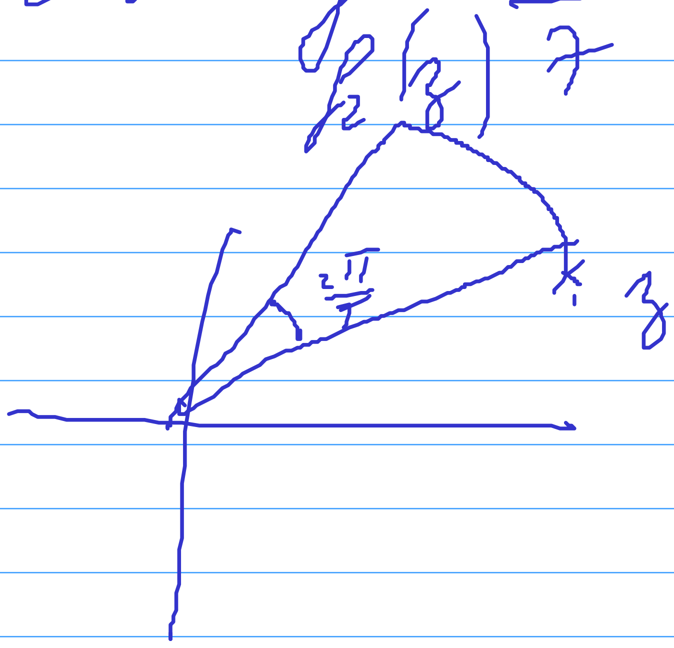
- **Point fixe de f** : $z_0 \in \mathbb{C}$

$f_2(z_0) = z_0$

i.e. $e^{\frac{2i\pi}{7}} z_0 = z_0$

mais $e^{\frac{2i\pi}{7}} \neq 1$ donc $z_0 = 0$

. f_2 est une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$.



c) $f_3(z) = e^{\frac{2i\pi}{3}} z - 1$

$a \neq 1$, $|a| = 1$,

f est encore une rotation.

Son centre est le point fixe de f.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, vérifiant $f(z_0) = z_0$

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} z_0 - 1 = z_0$$

$$z_0 \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = -1$$

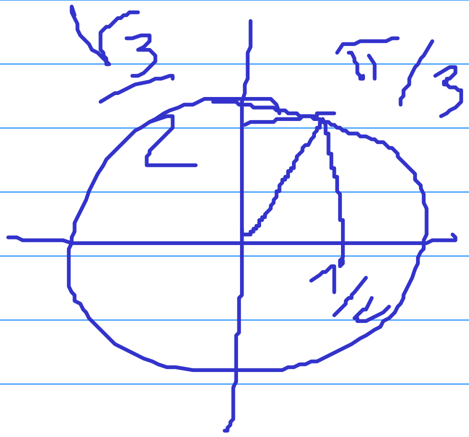
$$z_0 \, e^{\frac{i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = -1$$

$$z_0 \, e^{\frac{i\pi}{3}} \left(-2i \sin\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$z_0 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2i\sin\frac{\pi}{3}}$$

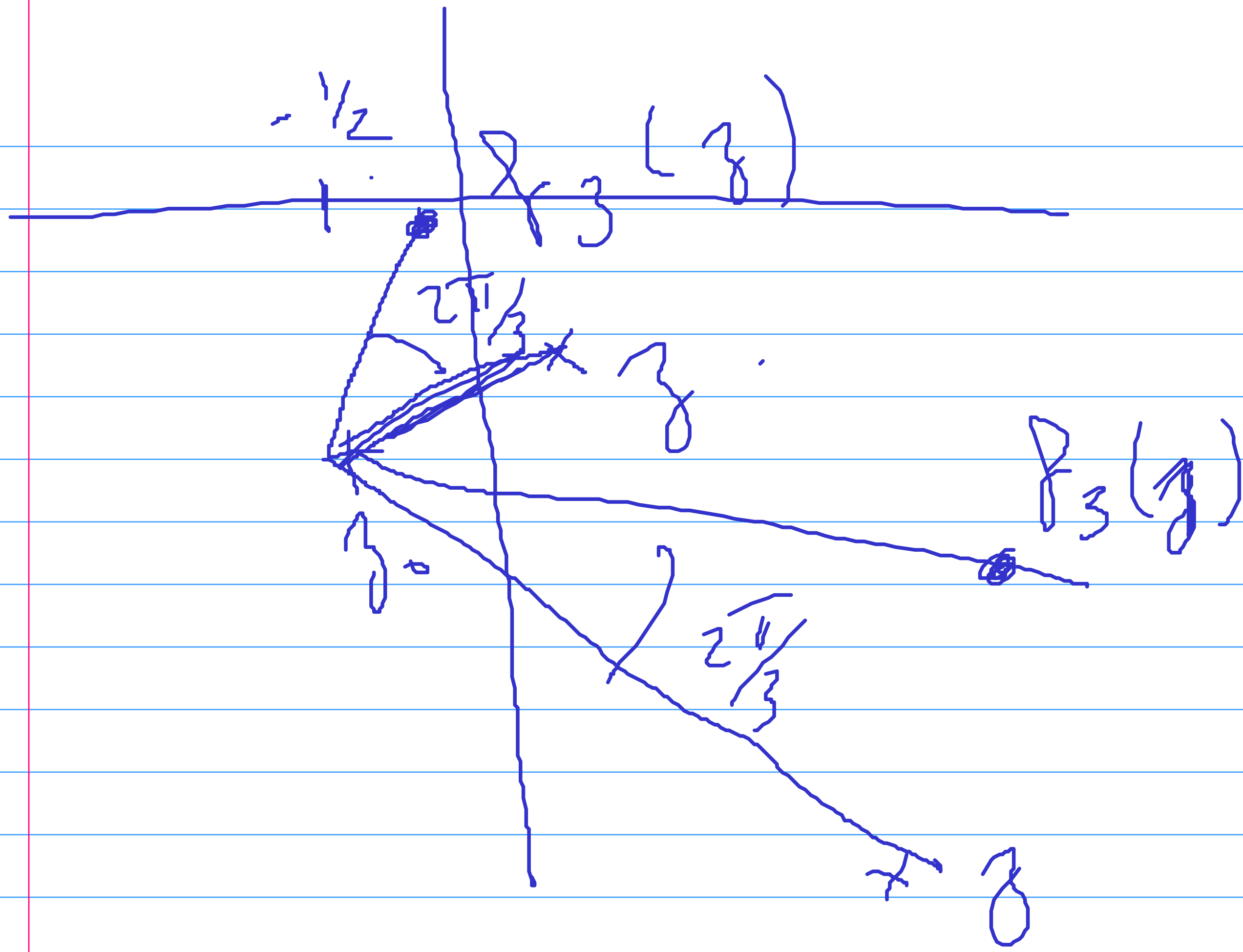
$$= \frac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{2i\sin\pi/3}$$

$$= \frac{1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{2}i\sqrt{3}} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$$



$$= \frac{-i}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = z_0$$

f_3 est une rotation de centre z_0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$



d) $f_4(z) = 3z - 5 + i$

$a = 3$, $a = 3e^{i0}$

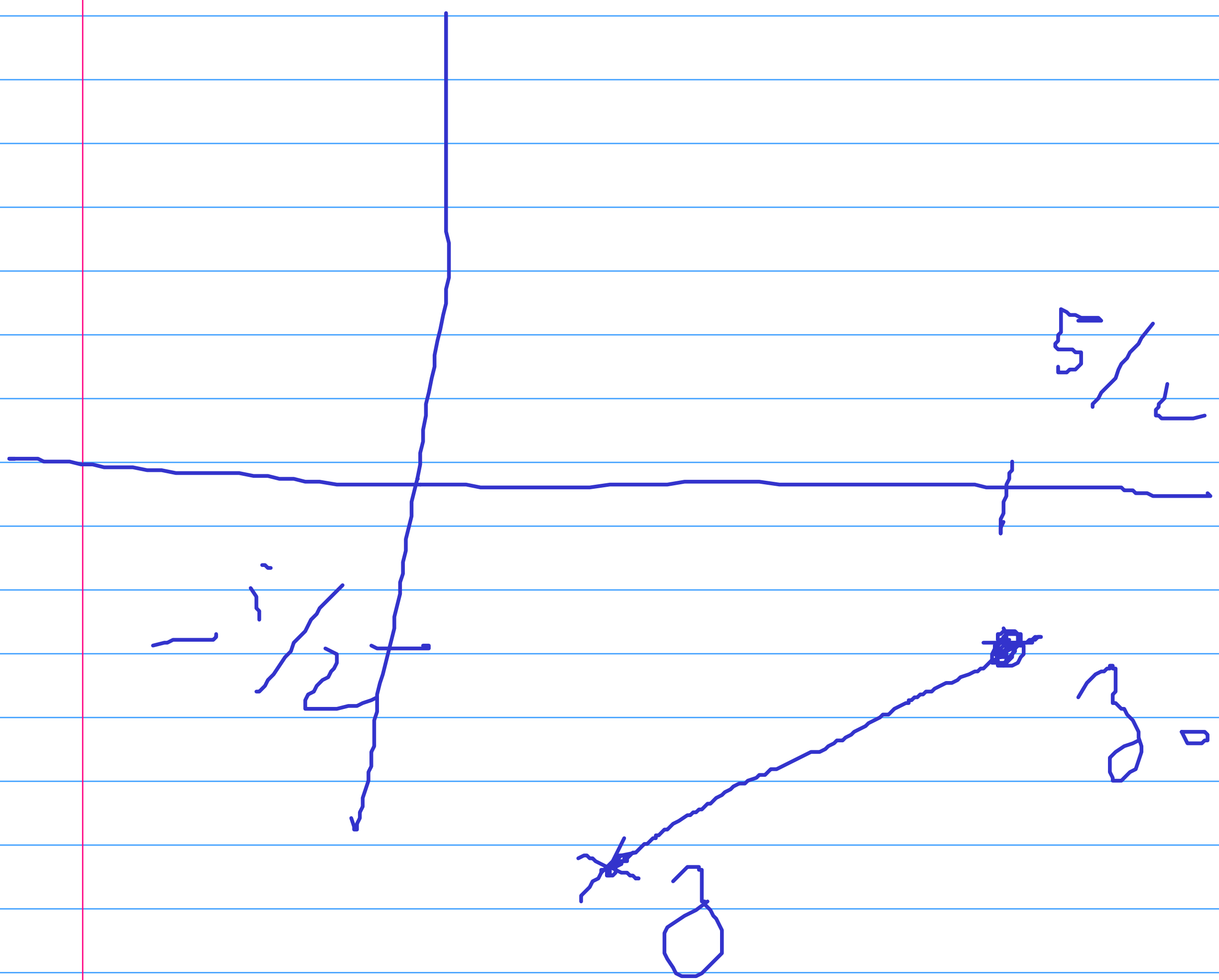
Donc f_4 est une homothétie de centre, le point fixe de f_4.

$z_0 \in \mathbb{C}$, $f_4(z_0) = z_0$

$$3z_0 - 5 + i = z_0$$

$$2z_0 = 5 - i$$

$$z_0 = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$



• $\mathcal{R}_4(O)$

c) $f_5(z) = (2+2i)z + 3i$

$a = 2+2i$, f_5 est

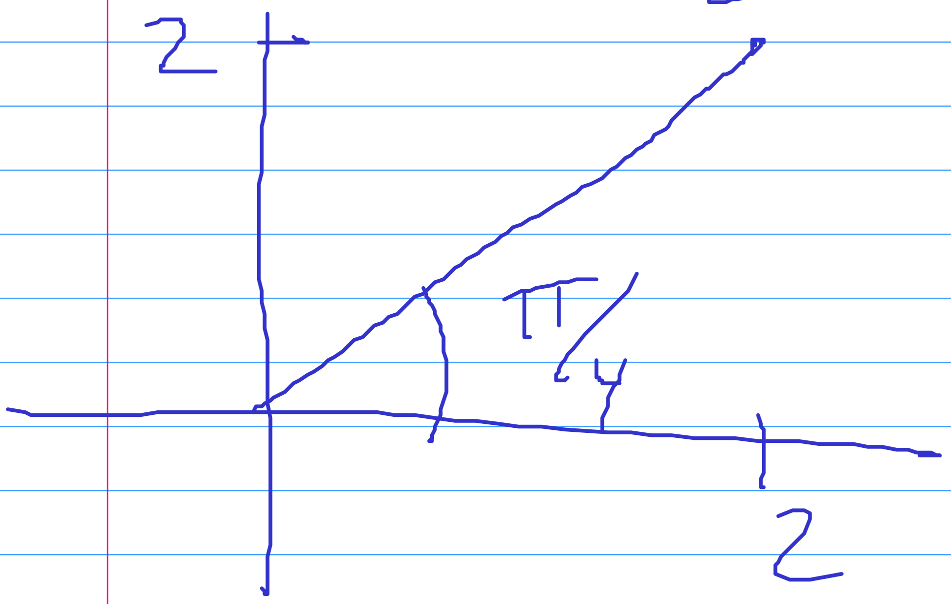
la composition d'une

rotation et d'une homothétie.

$|a| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$a = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



f_5 est la composition d'un rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'un homothétie de rapport $2\sqrt{2}$.

Le centre : le pt fixe de f_5.

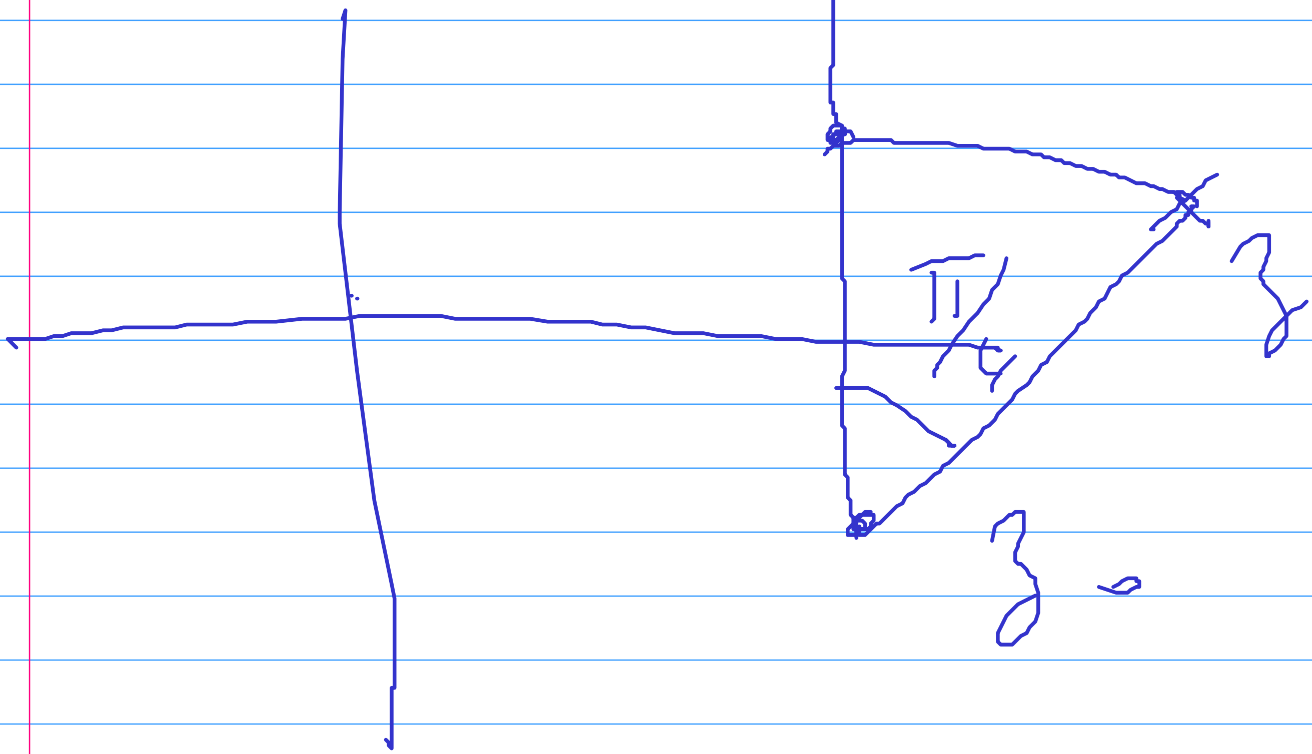
$$(2+2i)z_0 + 3i = z_0$$

$$(1+2i)z_0 = -3i$$

$$z_0 = \frac{-3i}{1+2i}$$

$$= \frac{(-3i)(1-2i)}{1+4}$$

$$z_0 = \frac{-3i-6}{5} - \frac{i}{5} - \frac{3i}{5}$$



Remarque :

$$a = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$r > 0$$

$$f(z) = az + b$$

$$f(z_0) = z_0$$

$$f(z) = az + \cancel{b} - az_0 - \cancel{b} + z_0$$

$$= f(z) \underbrace{- f(z_0) + z_0}_{=0}$$

$$f(z) = a(z - z_0) + z_0$$

$$\boxed{f(z) - z_0 = re^{i\theta}(z - z_0)}$$

question 2

a) $f(z) = z - 2 + i$

Translation de vecteur $-2+i$

b) Symétrie centrale : rotation d'angle π.

$f(z) = e^{i\pi}(z - i) + i$

Pour avoir le centre z_0 d'une ~~s~~ similitude il suffit de poser

$f(z) = a(z - z_0) + z_0$

$f(z_0) = z_0$

b) Dans notre cas

$$f(z) = -(z - i) + i$$

$$= -z + 2i$$

Symétrie centrale de centre i.

c) $$f(z) = e^{\frac{i\pi}{6}}(z - 1) + 1$$

d) $$f(z) = 3(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$$

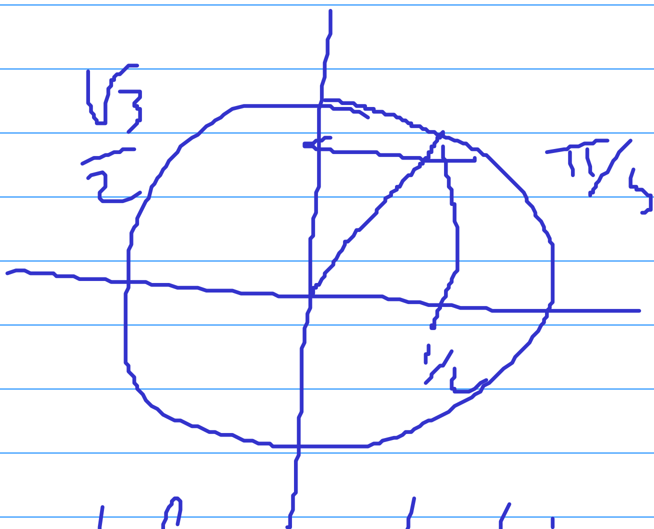
homothétie de rapport 3 et de centre 1 + 2i

e) $$f(z) = 2e^{\frac{i\pi}{3}}(z - 1 - i) + 1 + i$$

Question 3 :

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



φ_1 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

le centre est le point fixe de φ_1.

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_0 + 3 = z_0$$

$$z_0\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-3$$

$$z_0=\frac{-3}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{-3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

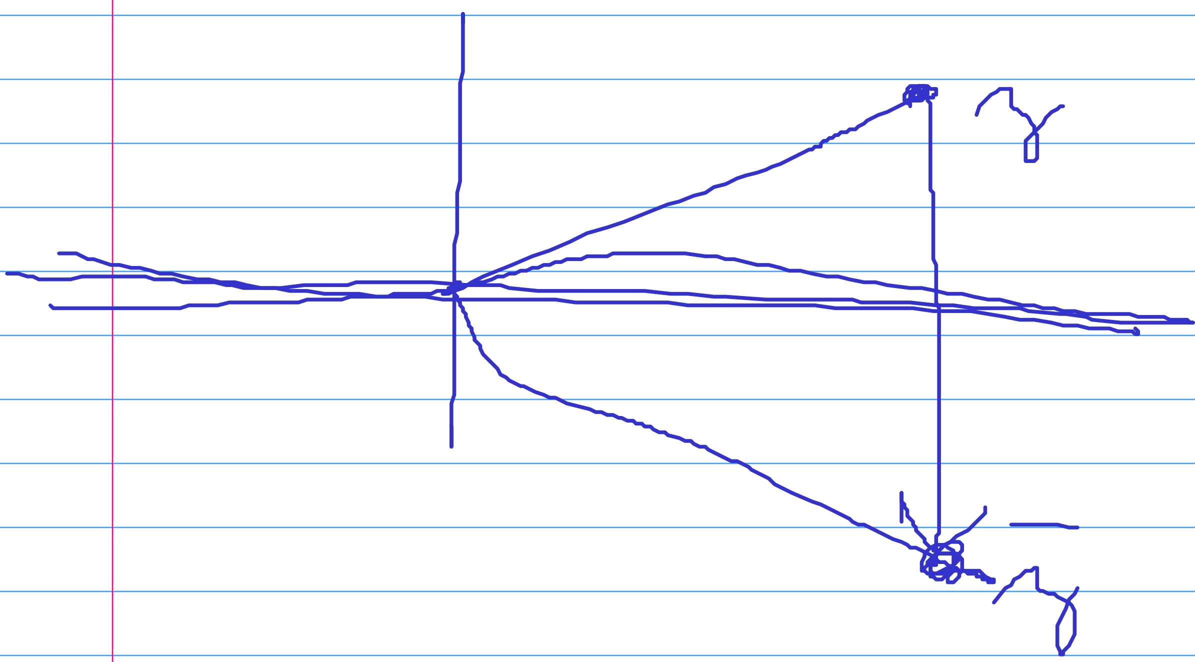
$$z_0=\frac{3}{2}+3i\frac{\sqrt{3}}{2}\ :\ \Omega$$

Centre de la rotation.

$$\varphi_2(z)=i\,\overline{z}$$

<u>Similitude indirecte</u>

exemple : $z \longmapsto \overline{z}$



C'est une symétrie d'axe (Ox).

Dans notre exemple il faut trouver l'axe de symétrie.

Dans notre cas

$\varphi_2(0) = 0$. Donc

l'axe de symétrie

passe par O.

On cherche l'angle

de cet axe de symétrie.

C'est à dire $\theta \in [0, 2\pi[$

vérifiant

$$\varphi_2(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$$

→ L'axe de l'angle θ

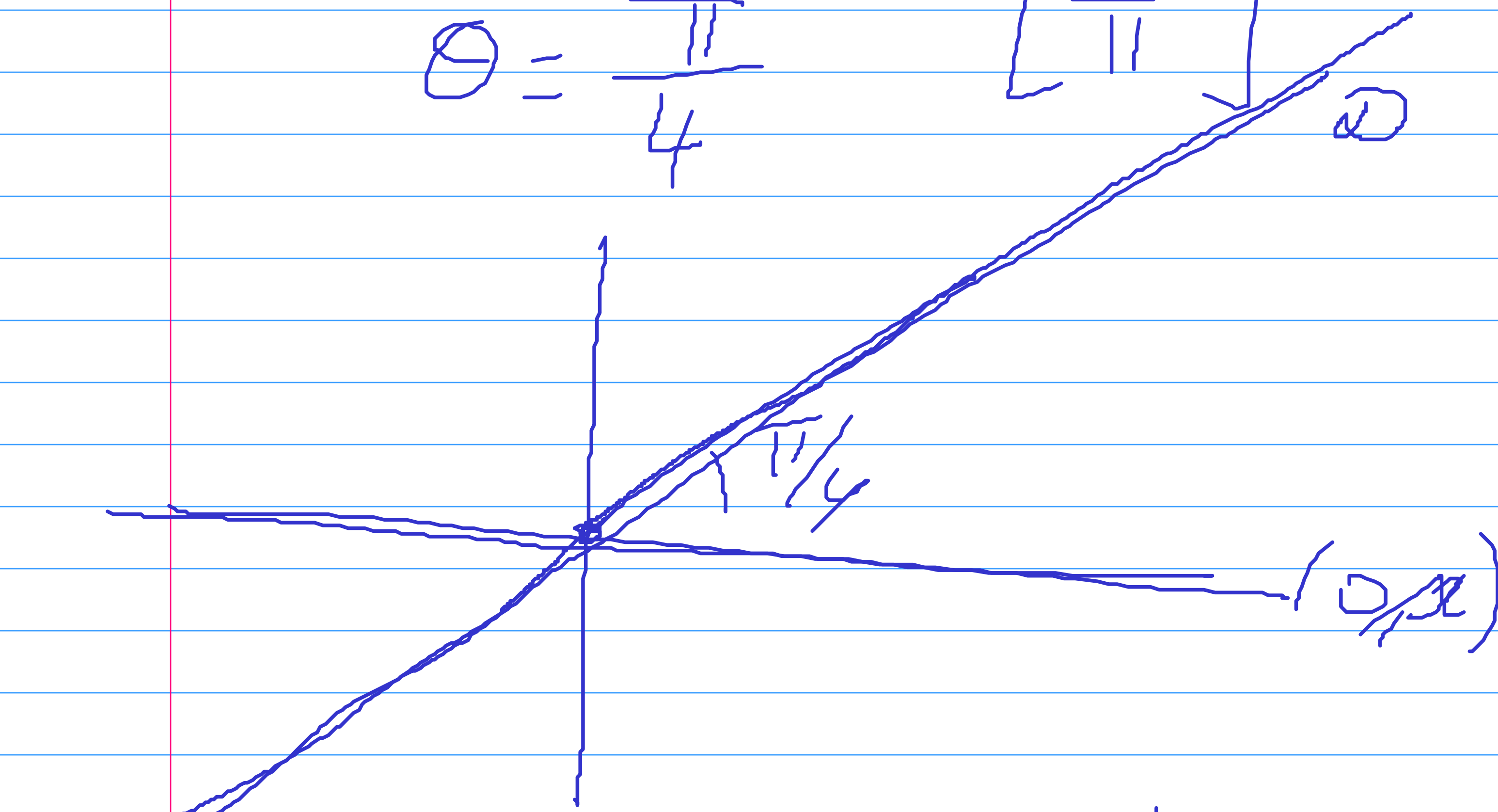
est fixe.

$$\varphi_2(e^{i\theta}) = i\,\overline{e^{i\theta}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\theta}$$

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = e^{i\theta}$$

Si donc $\frac{\pi}{2} - 2\theta = 0 \; [2\pi]$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \; [\pi]$$



Donc φ_2 est une symétrie d'axe D, droite d'angle $\pi/4$ par rapport à l'axe (Ox)

De façon générale

Une symétrie s'écrit

$$S_{a,\theta}(z) = e^{2i\theta}\overline{(z-a)}+a$$

→ Symétrie d'axe passant par a et d'angle θ.

Cadre général des symétries

Question 4 et 5

Question 4 :

$$S_{a,\theta}(z) = e^{2i\theta}\overline{(z-a)} + a$$

$$S_{b,\varphi}(z) = e^{2i\varphi}\overline{(z-b)} + b$$

On compare ces deux transformations

$$S_{b,\varphi}(S_{a,\theta}(z)) = S_{b,\varphi} \circ S_{a,\theta}(z)$$

$$= e^{2i\varphi}\overline{\left(e^{2i\theta}\overline{(z-a)} + a - b\right)} + b$$

$$= e^{2i\varphi}\left(e^{-2i\theta}(z-a) + \bar{a} - \bar{b}\right) + b$$

$$= e^{2i(\varphi-\theta)}(z-a) + e^{2i\varphi}(\bar{a}-\bar{b})$$

$$+ b$$

On a retrouvé une similitude directe.

- $S : 2(\varphi - \theta) = 0 \ [2\pi]$

alors $S_{b,\varphi} \circ S_{a,\theta}$ est une translation.

- Sinon c'est une rotation d'angle $2(\varphi - \theta)$.

<u>Question 5</u> :

$$r_{a,\theta}(z) = e^{i\theta}(z-a)+a$$

Rotation de centre a et d'angle θ

$$r_{b,\varphi}(z) = e^{i\varphi}(z-b)+b$$

$$r_{a,\theta} \circ r_{b,\varphi}(z) = r_{a,\theta}\left(r_{b,\varphi}(z)\right)$$

$$= r_{a,\theta}\left(e^{i\varphi}(z-b)+b\right)$$

$$= e^{i\theta}\left(e^{i\varphi}(z-b)+b-a\right)+a$$

$$= e^{i(\theta+\varphi)} z - e^{i(\theta+\varphi)} b$$

$$+ e^{i\theta}(b-a) + a.$$

Si $\theta+\varphi = 0 \; [2\pi]$

C'est une translation.

Sinon, c'est encore une rotation d'angle $\theta+\varphi$.