Feuille 7c, exo 12 (a, b, c, d)

a) $\{z \in \mathbb{C},\ |(1-i)z - 3i| = 3\} = A$

$|(1-i)z - 3i| =$

$\left|(1-i)\left(z - \dfrac{3i}{1-i}\right)\right| =$

$|1-i|\ \left|z - \dfrac{3i}{1-i}\right|$

Mais $|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z \in A$ ssi $\sqrt{2}\left|z - \dfrac{3i}{1-i}\right| = 3$

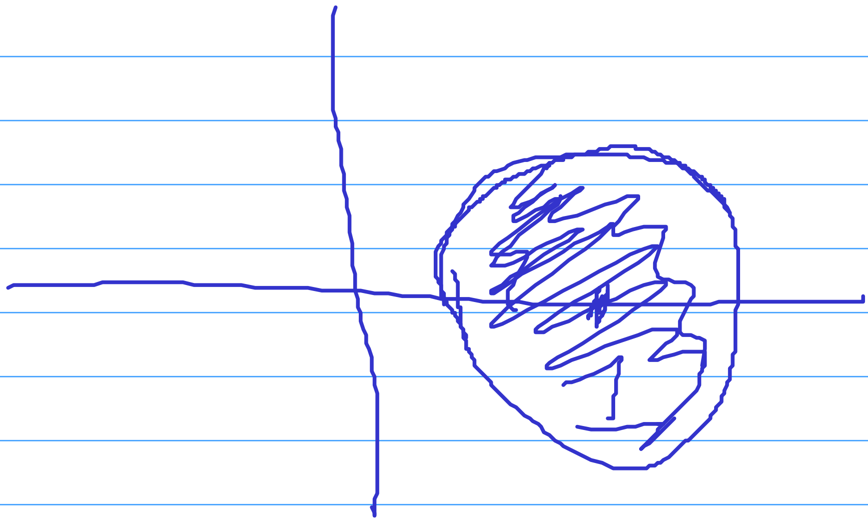
ssi $\left|z - \dfrac{3i(1+i)}{2}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

ssi $\left|z + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

A est l'ensemble des nb complexes qui sont à une distance de $\frac{3}{\sqrt{2}}$ de $-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.

A est un cercle de centre $-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |1-z| \leq \frac{1}{2} \right\}$



B est le disque de centre $\underline{1}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

c) $C = \{ z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2} \}$

$z \in C$, si $\mathrm{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2}$

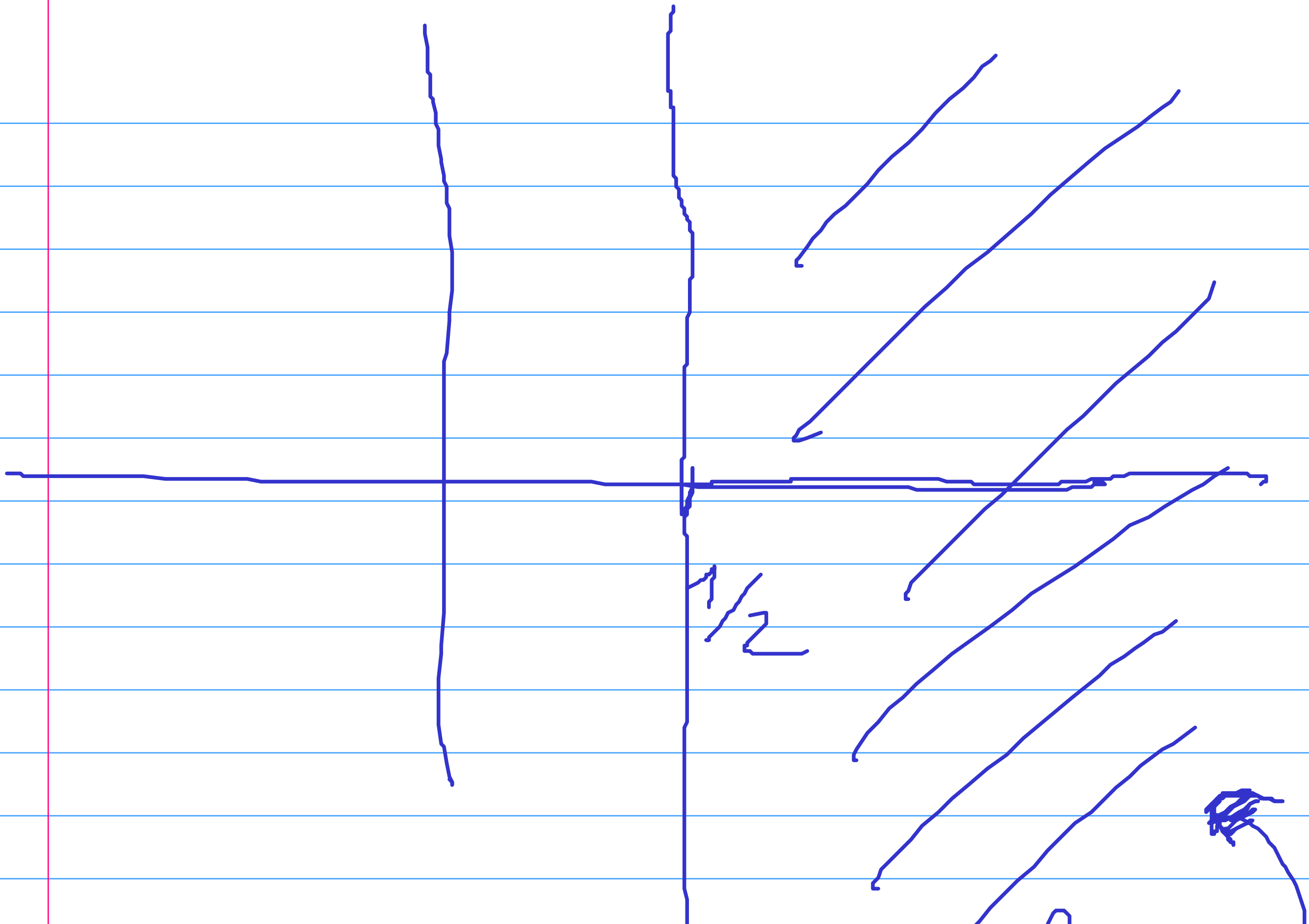
Mais $\mathrm{Re}(\underline{1} - z) = \mathrm{Re}(1) - \mathrm{Re}(z)$

$= \underline{1} - \mathrm{Re}(z)$

$z \in C$ ssi $1 - \mathrm{Re}(z) \leq 1/2$

ssi $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$

$z = a + ib$, $a > 1/2$



C'est ce demi-plan

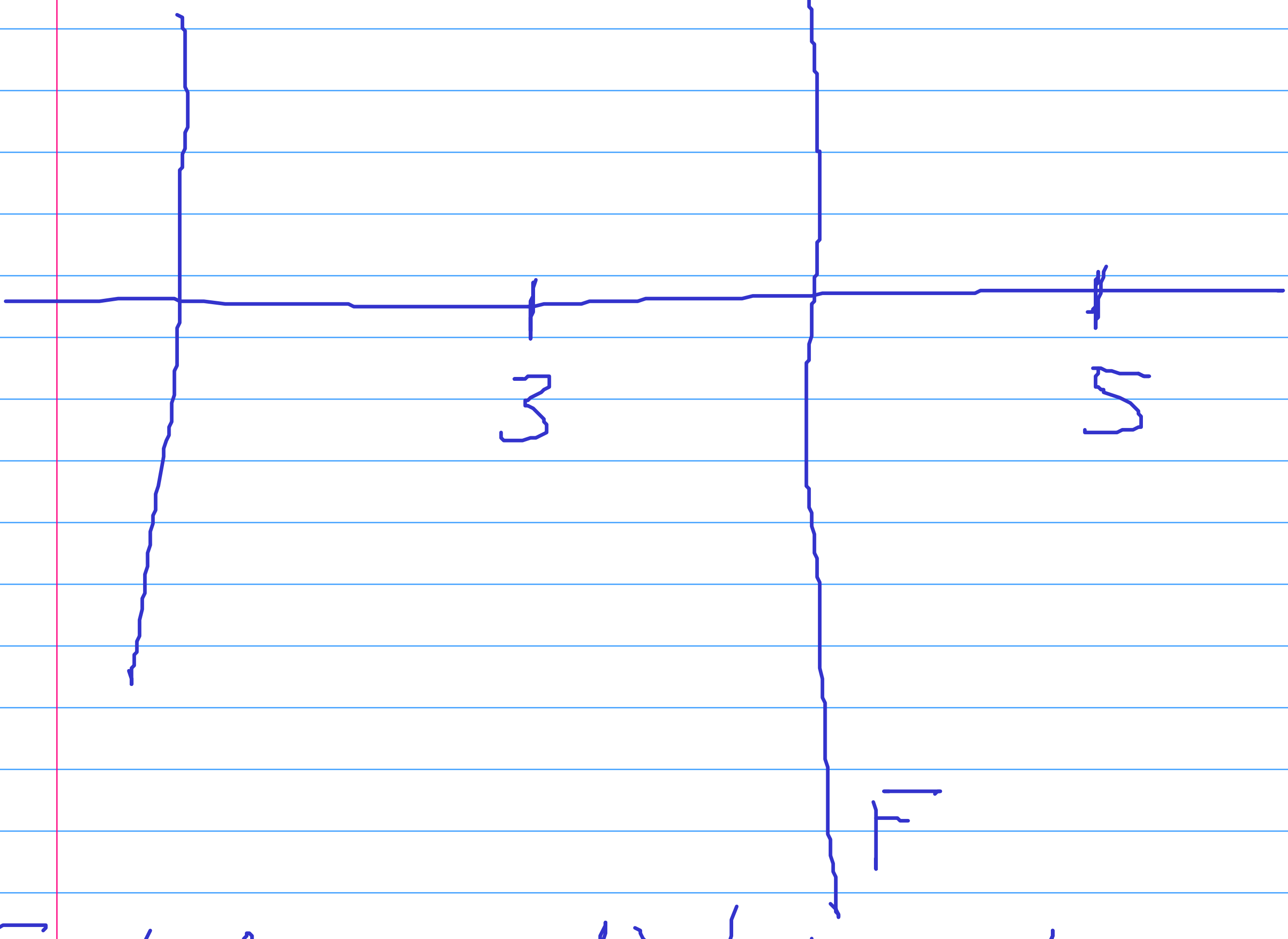
$$C = \{(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a \geq \frac{1}{2}\}$$

f) $$F = \left\{z\in\mathbb{C},\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1\right\}$$

$z \in F$ ssi $$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$$

$$\text{si } \frac{|z-3|}{|z-5|} = 1$$

$$\text{si } |z-3| = |z-5|$$



F est la médiatrice du segment [3, 5], ou alors de 3 et 5.

Feuille n° 8

<u>n° 1</u> : 2, 3, 4, 5, 1.

Rapel sur les o

- $f(a) = \underset{\text{en } 0}{o}(g(a))$

si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 0$

$(g(x) \neq 0$ si $x \neq 0)$

f est négligeable devant g au voisinage de 0.

- On peut écrire

$$f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

⚠ Je ne connais rien de $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

→ Ça donne une idée de la fonction f par rapport à g !

⚠ $o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{=} \frac{1}{n}\varepsilon_1(n)$

avec $\varepsilon_1(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ou bien $o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right)$ -

avec $\varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right) \neq 0$$

$$\|$$

$$\frac{1}{n}\varepsilon_3(n) - \frac{1}{n}\varepsilon_4(n)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\varepsilon_3(n) - \varepsilon_4(n)\right)$$

$$\varepsilon_3(n) - \varepsilon_4(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

exo 1 pour $n \to +\infty$

2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$+ \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$.

$o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \to 0$

donc $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$= o\left(\frac{1}{n}\right)$

Je lemme que

$$\frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

en effet $\dfrac{1/2^n}{1/n} = \dfrac{n}{2^n} = n\,2^{-n}$

$$= n \exp(-n \ln 2)$$

Par les croissances comparées

$$\frac{1/2^n}{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

Si $\dfrac{1}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

alors forcément $o\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini.

Question : $\frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

La réponse est NON

De même $\frac{1}{n} \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)$$

avec $\varepsilon(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\varepsilon(n)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\varepsilon(n)\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

lorsque $n \to \infty$.

$o(x)$

3) $g(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x) + x\ln x$

$+ o(x^2 \ln x) + x^2 + o(x^2)$

$x \qquad x\ln x \qquad x^2\ln x$

$x^2 \qquad o(x) \qquad o(x^2 \ln x)$

$o(x^2)$

$o(x \ln x)$

- $x \ln x$
- x

$o(x)$

- $x^2 \ln x = x(x \ln x)$
- x^2
- $o(x^2)$

$o(x \ln x)$

plus petit

$$x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Par les croissances comparées.

- $x^2 \ln x = x(x \ln x)$

$$x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $x^2 \ln x = o(x)$

donc $\boxed{o(x^2 \ln x) = o(x)}$

$$o(x^2) = x\, o(x)$$

$o(x^2) = x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$= x\, (\underbrace{x\, \varepsilon(x)}_{= o(x)})$

$= x\, o(x)$

formule : $\boxed{o(x^2) = x^2\, o(1)}$

$o(1) = 1 \times \varepsilon_2(x)$

avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$o(x^2) = x\, o(x)$ donc $o(x^2) = o(x)$

$x^2 = o(x)$ 10^{-3}

$g(x) = x + x\ln x + o(x)$
lorsque x tend vers 0

On peut aussi dire 10^{-2}

(b) $g(x) \underset{\text{en } 0}{=} x\ln x + o(x\ln x)$

On a perdu de l'information.

$g(x) = 0 + o(1)$ 10^{-1}

(a) $g(x) = o(1)$

$x\ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc $o(x\ln x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

4) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. $(n \to \infty)$

$\frac{1}{n}$ $\quad \frac{\ln n}{n}$ $\quad \frac{1}{n^2}$ $\quad \frac{1}{n \ln n}$

$\frac{\ln n}{n}$

$\frac{1}{n}$

$\frac{1}{n \ln n}$

$\frac{1}{n^2}$

$o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

plus petit.

$$G_n \sim \frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\hookrightarrow o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\hookrightarrow o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$v_n = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

i $f(x) = x + o(x^2) + o(x^3)$

$= x + x^2 \varepsilon_1(x) + x^3 \varepsilon_2(x)$

avec $\varepsilon_1(x) \longrightarrow 0$

$\varepsilon_2(x) \longrightarrow 0$

$= x + x^2 \underbrace{(\varepsilon_1(x) + x\,\varepsilon_2(x))}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}$

5) $u_n = n + o(n) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$

$+ \frac{n^2}{\ln n} + n \ln n + o(n \ln n)$.

Quand $n \longrightarrow \infty$

$n \qquad \sqrt{n} \qquad \frac{n^2}{\ln n}$

$n \ln n$

$$\frac{n^2}{\ln n}$$

$n \ln n$

n

$\sqrt{n}$

plus petit

$o(n \ln n)$

$o(n)$

$o(\sqrt{n})$

$$n = o(n \ln n)$$

$$\sqrt{n} = o(n \ln n)$$

$$o(n) = o(n \ln n)$$

$$o(\sqrt{n}) = o(n \ln n)$$

$$u_n = \frac{n^2}{\ln n} + n \ln n + o(n \ln n)$$

en l'infini

exercice 3 Question 1.

a) $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

b) $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\tan x - \tan(0)}{x - 0} \longrightarrow \tan'(0) = 1$

mais $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

c) $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x \longrightarrow 0} \longrightarrow f'(0)$

où $f(x) = e^x - 1$, $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$

Donc $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

De façon générale

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} ?$ forme indéterminée

$f(0) = g(0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\downarrow \atop f'(0)} \underbrace{\frac{x-0}{g(x)-g(0)}}_{\downarrow \atop \frac{1}{g'(0)}}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

d) $\frac{sh(x)}{x} = \frac{sh(x) - sh(0)}{x - 0}$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} sh'(0) = ch(0) = \underline{1}$$

e) $$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

où $f(x) = (1+x)^{\alpha} - 1$

$f(0) = 0$

$\to f'(0)$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f'(0) = \alpha$

Question 2 :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}$$

$$= 2\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2$$

$\to \frac{1}{2}$

D'après ce que l'on sait

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Donc $$\frac{\sin(x/2)}{x/2} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

Donc $$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^2 o(1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 o(1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3) Rappel

- $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

- $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$ si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 1$$

- $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$

$$u_n = v_n \left(1 + \underset{\infty}{o}(1)\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{u_n}{v_n} = 1 + \underset{\infty}{o}(1) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

- $u_n \sim u_n$
- $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$

alors $u_n \sim w_n$.

- $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$

$$\hookrightarrow u_n = v_n \left(1 + \varepsilon(n)\right).$$

avec $\varepsilon(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Question 3 :

a) $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\dfrac{\sin(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ car

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc $\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

b) Puisque $\dfrac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\tan(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

c) $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \longrightarrow f'(0)$

où $f(x) = \ln(1+x)$

$\forall x > -1, \; f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, \; f'(0) = 1$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Donc $\ln(1+u_n) \underset{n \to \infty}{\sim} u_n$

d) $\dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

donc $e^{u_n} - 1 \underset{n \to \infty}{\sim} u_n$

e) $\dfrac{sh(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

Donc $sh(u_n) \underset{n \to \infty}{\sim} u_n$

f) $$\frac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\cos' 0 = 0$$

$$\frac{1-\cos(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$1-\cos(u_n) = o(u_n)$$

g) $$\frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{u_n} \longrightarrow \alpha$$

$$\frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{\alpha} \underset{n \to \infty}{\sim} u_n$$

Lundi

• exercice 1 question 1

• exercice 10 a, b, c