Feuille d'exercices n° 1

Révisions d'Analyse - Fonctions réelles

ORDRE ET INEGALITÉS

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 3. Donner les ensembles de définition maximaux des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t^2 + t + 3$
2. $t \mapsto \sqrt{(t-1)(t+1)}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 6}$
4. $x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

Exercice 4. (*) Soient x, $y \in [0,1]$. Montrer que $x^2 + y^2 - xy \leq 1$.

PARITÉ ET COMPOSITION

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,, f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = x$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ sinon} \end{array} \right.$.
Montrer que $f \circ f = id$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 8.

1. Soient f et g deux fonctions réelles paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ?
2. Etudier le cas f et g impaires.
3. Etudier le cas f paire et g impaire.

Exercice 9.

1. Montrer que toute fonction impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$.
2. Montrer que la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
3. Montrer que toute fonction réelle se décompose en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
4. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire

DÉRIVATION ET COMPOSITION

Exercice 10. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(x^2(x+1)) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]1,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(\ln(x)) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll}]-\pi/2,\pi/2[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

Exercice 11. Retrouver les dérivées classiques des fonctions suivantes à l'aide du résultat sur la dérivation de fonctions réciproques :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^{1/3} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln x \end{array}$$

Exercice 12. (*) Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f.

ETUDES DE FONCTIONS

Exercice 13.

PARTIE A Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer g' et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de g.

PARTIE B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\exp(-x)$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer f'. Dresser le tableau de variations de f.
   Indication : On pourra s'aider de la partie A
3. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\exp(-\alpha))$.
4. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer T puis $(\mathcal{C})$ (on admettra que $0.35 < \alpha < 0.36$ et que $0.85 < f(\alpha) < 0.86$).

Exercice 14. Etudier les fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x - \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, BIJECTIVITÉ

Exercice 15. Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[\,,\ x \longmapsto x^2 - 1$. Cette fonction est-elle bijective ?

Exercice 16.

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   (a) f est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \in [-1, 1]$.
   (c) Montrer que la restriction $g = f_{|[-1,1]}$ est une bijection.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x/(x^2+1)$.

1. f est-elle injective ? surjective ? *Indication : pour l'injectivité, on pourra montrer que pour tous réels u, v, on a $f(u) = f(v) \Leftrightarrow 2(v-u)(uv-1) = 0$. Pour la surjectivité, on pourra s'intéresser à l'équation $f(x) = 2$.*
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], x \longmapsto f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 18. (*) Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Étudier les assertions suivantes (en proposer une démonstration si elles sont vraies, et un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses)

1. Si $f \circ g$ est surjective, alors f l'est aussi.
2. Si $f \circ g$ est surjective, alors g l'est aussi.
3. Si $f \circ g$ est injective, alors f l'est aussi.
4. Si $f \circ g$ est injective, alors g l'est aussi.
5. Si f est injective, alors $f \circ g$ l'est aussi.