Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2020-2021

Math I - PM

Devoir n° 1 et sa correction

À RENDRE POUR LE 13/10/2020

La qualité et la propreté de la rédaction seront prises en compte.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice,on pourra admettre le résultat de la question et traiter les autres questions.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Calculer la valeur de S_1, S_2 et S_3.

   On trouve $S_1 = 1/6$, $S_2 = 5/24$ et $S_3 = 9/40$.

2. Trouver trois réels a, b, c tels que

   $$\forall k \in \mathbf{N},\ k \geq 1, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

   On factorise pour trouver

   $$a = 1/2, \qquad b = -1, \qquad c = 1/2.$$

3. Trouver la valeur de S_n comme une fonction de n.

   On a donc

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} (\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}) \\ &= (a+b+c) \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 3a/2 + b(1/2 + 1/(n+1)) + c(1/(1+n) + 1/(2+n).\end{aligned}$$

   Avec les valeurs de a, b et c on obtient

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 1/4 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)},$$

   car $a + b + c = 0$.

4. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

   Ainsi on a facilement que

   $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = 1/4.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On rappelle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, on a :
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

   Evident d'après la formule de $\binom{n}{k}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, si $k \leq \frac{n-1}{2}$, alors on a :
$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}.$$

   D'après la formule précédente, on a
$$\binom{n}{k} = \frac{k+1}{n-k}\binom{n}{k+1}.$$
   Ainsi $\dfrac{k+1}{n-k} \leq 1$ si et seulement si $k \leq \frac{n-1}{2}$.

3. On suppose n impair.

   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)/2]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n-1)/2}$.

   Puisque n est impair, $(n-1)/2 \in \mathbf{N}$. Par ailleurs on a d'après la question précédente,
$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \binom{n}{2} \cdots \leq \binom{n}{(n-1)/2},$$
   ainsi pour tout $k \in [\![0, (n-1)/2]\!]$,
$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n-1)/2}.$$

   (b) En déduire que, pour tout $k \in [\![(n+1)/2, n]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n+1)/2}$.

   Pour cela il suffit de remarque que
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
   et que
$$\binom{n}{(n+1)/2} = \binom{n}{(n-1)/2}$$

   (c) Conclure que
$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-1)/2}.$$

   D'après ce qui précède on a bien
$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$$

4. On suppose n pair. Proposer, *sans démonstration*, une valeur pour $\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}$.

   On a, dans le cas n pair
$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{n/2}$$

Exercice 3. Déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ |x|\,(1+2y^2)\ ;\ x \in [-2,-1] \cup [3,4],\ y \in [-1,2] \right\} \\ B &= \left\{ \frac{|1+y^2|}{x-3}\ ;\ (x,y) \in [0,2] \times [-2,1] \right\}. \end{aligned}$$

On trouve

$$\min(A) = 1, \qquad \max(A) = 36$$

et

$$\min(B) = -5, \qquad \max(B) = -1/3$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $\sqrt{x} \le x$.

   Faux, il suffit de prendre $x = 1/2$.

2. En notant $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière, on a, pour tout couple de réels $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\lfloor x \cdot y \rfloor = \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$.

   Faux, il suffit de prendre par exemple $x = 1/2$ et $y = 2$.

3. Pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.

   Vrai ! Puisque $x^2 \ge 0$ et $y^2 \ge 0$, la somme est nulle si et seulement si $x^2 = y^2 = 0$ soit donc $x = y = 0$.

4. Il existe un couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que $4y \le x \le y$.

   Vrai, il suffit de prendre $x = y = 0$.

5. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (1-x)$ est la seule fonction pour laquelle pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

   $$f(y - f(x)) = 2 - x - y \ \textit{(Indice : choisir un } y \textit{ en particulier).}$$

   Vrai ! Déjà cette fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (1-x)$ vérifie bien cette identité. Réciproquement, si une fonction f vérifie cette identité pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, on peut poser $y = x - f(x)$. On obtient alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

   $$f(x) = 2 - f(x) - 2x,$$

   soit donc

   $$f(x) = 1 - x.$$

6. La fonction

   $$h : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}; x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

   est bijective.

   Vrai ! Il suffit de faire le tableau de variations de f. Ou bien, plus simplement, on exhibe sa fonction inverse. Il suffit de résoudre

   $$y = \frac{x+1}{x-1}$$

   ce qui donne

   $$x = \frac{y+1}{y-1},$$

   pour $y \ne 1$. Cet inverse est unique, ainsi la fonction h est bien bijective $\mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

7. Pour tout triplet de parties $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\mathbf{R})^3$, si $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ sont non vides, alors $A \cap B \cap C$ est non vide.

   Faux ! Il suffit de faire un beau dessin que j'ai la flemme de faire avec latex.

8. La phrase « S'il ne pleut pas demain, alors je vais chez ma tante et mon oncle », a la même valeur de vérité que la phrase « Si je vais chez mon oncle et ma tante, alors il ne pleut pas demain ».

   Faux. En effet on peut aller chez son oncle et sa tante même s'il ne pleut pas. C'est à dire que je peux quoi qu'il arrive aller chez mon oncle et ma tante. Ce qui est équivalent c'est la phrase suivante

   « Si je ne vais pas chez mon oncle et ma tante c'est qu'il pleut demain. ».