

---

**Feuille d'exercices n° 2**  
RÉCURRENCE, SOMMES ET PRODUITS

---

**Exercice 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$$

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ .

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 3.** (\*) Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par récurrence par  $u_0 = 1$ , et, pour  $n \in \mathbf{N}$ , par

$$u_{n+1} = 4u_n + 9.$$

1. Montrer qu'il existe  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}$  tel que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}} = (u_n - \lambda)_{n \in \mathbf{N}}$  soit une suite géométrique.
2. En déduire une expression de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Exercice 4.** Calculer le terme général des suites définies par récurrence suivantes :

1.  $u_0 = 2$  et pour  $n \in \mathbf{N}$  par  $u_{n+1} = u_n^3$
2.  $v_0 = 3$  et pour  $n \in \mathbf{N}$  par  $v_{n+1} = 2v_n^3$

**Exercice 5.** Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est un multiple de 7.
2. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $3^{2n} + 2^{6n-5}$  est un multiple de 11.

**Exercice 6.** Écrire à l'aide du symbole  $\sum$  les expressions suivantes :

1.  $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15}$
2.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$
3.  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$
4.  $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

**Exercice 7.** Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1.  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2.  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3.  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4.  $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$  (avec  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ )

**Exercice 8. (Formule du binôme de Newton)**

1. Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note (avec la convention  $0! = 1$ ) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Calculer  $\binom{0}{0}$ ,  $\binom{n}{n}$  et  $\binom{n}{0}$  pour  $n \in \mathbf{N}$ .

2. Formule du binôme de Newton.

- (a) Montrer que pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$  :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

- (b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n-1$ , on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

- (c) Montrer la formule du binôme de Newton : pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

3. Mise en pratique.

- (a) Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Simplifier les sommes  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .

- (b) Montrer que pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$  :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

- (c) En déduire la somme  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exercice 9. (Factorisation de  $a^n - b^n$ )**

Montrer que, pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  et tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

**Exercice 10.** Soit  $x \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ .

1. Calculer  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .
2. En déduire la valeur de  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$ .
3. Retrouver la valeur de  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exercice 11.** Calculer les sommes suivantes. On pourra admettre les résultats de l'exercice 7.

1.  $\sum_{k=5}^{11} k$
2.  $\sum_{i=2}^{10} (3 + 5i)$
3.  $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$
4.  $\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i}$
5.  $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$
6.  $\sum_{k=1}^n (-1)^k$
7. Pour  $n \geq 3$ ,  $\sum_{k=3}^n 5$
8.  $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 2k + 1)$
9.  $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1)$
10.  $\sum_{k=1}^n 5^{2k}$
11.  $\sum_{k=1}^n (2^k + k^2 + 1)$
12.  $\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}$

**Exercice 12.** Calculer les produits suivants :

1.  $\prod_{k=0}^n 3$
2.  $\prod_{k=0}^n (2k)$
3.  $\prod_{k=0}^n (2k + 1)$
4.  $\prod_{k=0}^n q^k$
5.  $\prod_{k=0}^n q^{2^k}$

**Exercice 13. (Sommes et produits télescopiques)**

1. (a) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\frac{1}{(k)(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ .  
 (b) Simplifier, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .  
 (c) En déduire la limite de la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
2. Calculer  $\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$ .
3. Calculer  $\prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)$ .
4. Calculer  $\sum_{k=0}^n k \times k!$

**Exercice 14.** (\*) Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $x \in \mathbf{R}$ , on définit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , que valent  $P_n(0), P_n(1), P_n(-n)$ ?
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ , on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

3. Pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , écrire  $P_n(k)$  comme un coefficient binomial.

**Exercice 15. (Sommes doubles)**

Calculer les sommes suivantes :

1.  $\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} \right)$

2.  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$

3.  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$