Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2020–2021

Fondamentaux des mathématiques I

Feuille d'exercices n° 7b

NOMBRES COMPLEXES (DEUXIÈME PARTIE : TRIGONOMÉTRIE)

---

3. Forme trigonométrique, argument

Exercice 1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

a) i b) $1+i$ c) $1-i$

d) $\sqrt{3}+i$ e) -1 f) 1

Exercice 2.

1. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 3. Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $z = e^{i\theta}$. Déterminer la forme trigonométrique de $1+z+z^2$.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que

a) $(1+i)^n \in \mathbf{R}$ b) $(\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbf{R}$

Exercice 5.

1. Soient $\theta \in]-\pi,\pi[$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Démontrer l'identité
$$e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it},$$
puis exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de t.
2. En déduire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, une simpification de $\cos(2\arctan x)$ et $\sin(2\arctan x)$.
3. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$,
$$\arg(z) \equiv 2\text{arctan}\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)+|z|}\right) \pmod{2\pi}$$

4. Racines de l'unité

Exercice 6. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 = -8i$ b) $z^5 - z = 0$ c) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$

d) $z^2\bar{z}^7 = 1$ e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.
2. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.
3. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

   (*Indication : on pourra commencer par calculer* $\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k$ *pour tout* $j \in \{0,\dots,n\}$)

Exercice 8. Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18}\left(z - e^{2ik\pi/19}\right)^2 = 19z^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{18}\left|z - e^{2ik\pi/19}\right|^2 = 19(1+|z|^2).$$

5. Angles remarquables

Exercice 9. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 10.

1. Résoudre algébriquement l'équation $z^2 = 1+i$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 11. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?
2. Justifier l'identité $\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0$.
3. Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

6. D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 12. *Réduction de* $a\cos x + b\sin x$.

1. Soient a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x+\theta).$$

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 13. Développer $\cos(2\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\cos(\varphi)$, puis $\sin(3\varphi)$ pour obtenir un polynôme en $\sin(\varphi)$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta).$$