Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2020–2021

Fondamentaux des mathématiques I

Feuille d'exercices n^{o} 7c

NOMBRES COMPLEXES (TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE)

---

7. Polygones

Exercice 1. Soient u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite « du parallélogramme » :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Exercice 2. Soient a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \qquad \text{et} \qquad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatre points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Exercice 3. Soient a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points formant dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = -1.$$

Exercice 4. Soit θ un nombre réel, avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1 = 0$.
2. Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les affixes des sommets d'un hexagone régulier ?

8. Transformations affines

Exercice 5. Rappeler l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

1. La translation de vecteur $v \in \mathbf{C}$.
2. L'homothétie de centre $a \in \mathbf{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
3. La rotation de centre $a \in \mathbf{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$.
4. La symétrie par rapport à un axe passant par $a \in \mathbf{C}$ et faisant un angle $\theta \in \mathbf{R}$ avec l'axe réel.

Exercice 6. On rappelle l'identification canonique entre $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ via l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\mathrm{Re\ z}, \mathrm{Im\ z}) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations du plan ayant l'écriture complexe suivante :

   a) $f_1(z) = z + 3 - 2i$, b) $f_2(z) = e^{i2\pi/7}z$, c) $f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1$,

   d) $f_4(z) = 3z - 5 + i$, e) $f_5(z) = (2+2i)z + 3i$.

2. Donner l'écriture complexe des transformations du plan suivantes :
   (a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$;
   (b) La symétrie centrale de centre i ;
   (c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
   (d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i.$;
   (e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.
3. Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes :
$$\varphi_1 : \ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3, \qquad \varphi_2 : \ z \mapsto i\,\bar{z}.$$
4. Démontrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Démontrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 7. Soit s une similitude directe telle que $s(2-i) = 1$ et $s(-1+2i) = 1+6i$. Déterminer l'homothétie h et la rotation r telles que $s = h \circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s.

Exercice 8. On dit qu'un ensemble d'applications E est *stable par composition* si $f \circ g \in E$ pour toutes applications $f, g \in E$. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

1. L'ensemble des translations ?
2. L'ensemble des homothéties ?
3. L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?
4. L'ensemble des homothéties et des translations ?
5. L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?
6. L'ensemble des rotations ?
7. L'ensemble des symétries et des rotations ?
8. L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?
9. L'ensemble des similitudes directes ?

Exercice 9. On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z, associe le point M_0 d'affixe $z_0 = jz+3$.

1. Déterminer les points invariants (points fixes) de r, et la nature de la transformation r.
2. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
3. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où $r^3 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Exercice 10. On identifie $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$. On considère la transformation $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie, pour $z \in \mathbf{C}$, par

$$f(z) = 2\overline{z} + 3 - 4i.$$

1. Calculer le(s) points fixe(s) de f.
2. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
4. Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par la transformation f.

Exercice 11. Soient f et g les deux transformations du plan complexe définies par $f(z) = -z - 2i$ et $g(z) = 2z - 1 - i$.

1. Déterminer les points fixes de f et g.
2. Démontrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
3. Démontrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
4. Démontrer que ces trois centres sont alignés.

9. Quelques ensembles de points

Exercice 12. Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

a) $|(1-i)z - 3i| = 3$ b) $|1 - z| \leqslant 1/2$ c) $\mathrm{Re}(1 - z) \leqslant \frac{1}{2}$ d) $\mathrm{Re}(iz) \leqslant \frac{1}{2}$

e) $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$ f) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$ g) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 2$ h) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2$

Exercice 13. Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{1+it} \;,\; t \in \mathbf{R} \right\}$ est contenu dans le cercle de centre 1/2 et de rayon 1/2. Est-ce le cercle tout entier ?