Feuille d'exercices n° 8

Analyse asymptotique

Exercice 1. « Nettoyer » les expressions suivantes :

1. $f(x) =_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $u_n =_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$.
3. $g(x) =_{x\to 0} x + \mathrm{o}(x) + x\ln(x) + \mathrm{o}(x^2\ln x) + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
4. $v_n =_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n\ln n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.
5. $w_n =_{n\to+\infty} n + \mathrm{o}(n) + \sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) + \dfrac{n^2}{\ln n} + n\ln n + \mathrm{o}(n\ln n)$.

Exercice 2.

1. Soit f une fonction réelle telle que $f(x) =_{x\to 0} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. Montrer que $f(x)^2 =_{x\to 0} f(2x) + o(x^3)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{1-x} =_{x\to 0} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$.
3. En déduire un développement de $\frac{1}{1+x}$ quand $x \to 0$.
4. Donner un développement en $x \to 0$ de $\dfrac{1}{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)}$
5. Montrer ensuite que f est non nulle sur un voisinage de zero et que $f(x)^{-1} =_{x\to 0} f(-x) + o(x^3)$.

Exercice 3.

1. En interprétant les expressions suivantes comme des taux d'accroissement, calculer les limites suivantes lorsque x tend vers 0 :

   a) $\frac{\sin(x)}{x}$, b) $\frac{\tan(x)}{x}$, c) $\frac{e^x-1}{x}$,

   d) $\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$, e) $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2. En exploitant l'identité $\cos(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

   En déduire $\cos(x) =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites de terme général ci-dessous :

   a) $\sin(u_n)$, b) $\tan(u_n)$, c) $\ln(1+u_n)$,

   d) $e^{u_n} - 1$, e) $\mathrm{sh}(u_n)$, f) $1 - \cos(u_n)$,

   g) $(1+u_n)^\alpha - 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 4. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de termes général ci-dessous :

a) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, c) $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2+1})$,

d) $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$, e) $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$, f) $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}.$$

Déterminer des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites (a_n), (b_n) et $(a_n + b_n)$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Établir l'encadrement

$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes positifs. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a) La suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

b) On peut extraire de (u_n) une sous-suite majorée.

c) On peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n$.
2. En déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

Exercice 9. Soit (a_n) une suite de réels, décroissante et telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 10. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{3x-4}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$, f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$, i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin(x)}$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$, k) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$, l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$,

m) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$, n) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)^2}$, o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x))^2 - \sqrt{x}$,

p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$, q) $\displaystyle\lim_{x\to0} \sqrt{x}\ln(x)^3$, r) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\ln(x)^2)}{x^n}$.

Exercice 11. Déterminer tous les nombres réels a, b tels que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x - 1}\right) = 0.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 13. Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :

a) $x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$;

b) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en 0 ;

c) $x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$;

d) $x \mapsto \cos\left(e^{1/x^2}\right)$ en 0.

Exercice 14. Construire une fonction dérivable $f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $f'(x)$ n'ait pas de limite en $+\infty$ et soit non bornée sur $[1, +\infty[$.

Exercice 15. Soit $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{x+y}$. Montrer que f est constante.