TD 8

exercice 10 question c.

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} = \text{forme indéterminée.}$$

$x \to 1$

$x > 1$

$$\frac{1}{1-x} \to -\infty \qquad \frac{1}{1-x^2} \to -\infty$$

$$= \frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}+x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x\,(\cancel{1-x})}{(\cancel{1-x})(1-x^2)}$$

$$= \frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)}$$

$$\xrightarrow[x\to 1^+]{} -\infty \qquad \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$$

$x > 1$ $\qquad$ $x < 1$

exercice 4 (a, b, c)

exercices 5, 6, 10 (a b c e g h)

---

exo 4 a)

$$\boxed{u_n = n^{1/n} - 1}$$

$$u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1$$

On sait que $\boxed{e^x - 1 \underset{0}{\sim} x}$

donc $\frac{1}{n}\ln n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln n$

D'où $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln n}$

b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{n+1-n+1}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

$$u_n = \frac{2}{n^2} \boxed{\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\boxed{u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}}$$

$$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

c) $$u_n = \ln\big(\underbrace{n+\sqrt{n^2+1}}_{\text{ressemble à } 2n}\big)$$

$$u_n = \ln\left(n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\ln(n)}_{\downarrow \; \infty} + \underbrace{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}_{\downarrow n\to\infty \; \ln 2}$$

$$u_n = \ln(n)\underbrace{\left(1+\frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)}\right)}_{\downarrow n\to\infty \; 1}$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Exercice 5

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right]$$

Rappel :

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

→ cf. ex 3.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x}\ \cancel{\underset{0}{\sim}}\ \frac{x}{2}$ $\quad x \to 0$ $\quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$

D'où $\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

x remplacé par $1/n$

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \frac{n^{-1/4}}{\sqrt{2}}$$

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{a_n b_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

$$a_n + b_n$$

⚠ !! On ne peut pas additionner des equivalents

$$a_n \sim \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$$

Donc $a_n = \dfrac{n^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\left(1+\varepsilon_1(n)\right)$

avec $\varepsilon_1(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$b_n = \frac{1}{n}\left(1+\varepsilon_2(n)\right)$$

avec $\varepsilon_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$a_n+b_n = \frac{1}{\sqrt{2}n^{1/4}} + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon_1(n)}{n^{1/4}\sqrt{2}}}_{=o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)} + \underbrace{\frac{\varepsilon_2(n)}{n}}_{o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

- $1/n^{1/4}$
- $\dfrac{1}{n}$ $\quad o\left(\dfrac{1}{n^{1/4}}\right)$

plus petit

$$a_n + b_n = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

Oral é 6 6

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n} \end{cases}$$

On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \le u_n \le \sqrt{n} + 1$

Démonstration par récurrence.

$n = 0$: $u_0 = 1$ on a bien $0 = \sqrt{0} \le u_0 \le \sqrt{0} + 1 = 1$

On pose P_n : "$\sqrt{n} \le u_n \le \sqrt{n+1}$"

P_0 est vérifiée.

On suppose P_n et on cherche à démontrer P_{n+1}

$$u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

mais $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc

$$1+\frac{n}{\sqrt{n}+1} \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}}$$

- $1+\frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}+1$

Donc $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + 1$

- Il faut montrer que

$$\sqrt{n+1} \leq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}+1}$$

$$1+\frac{n}{\sqrt{n}+1}-\sqrt{n+1}=\frac{\sqrt{n}+1+n-\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n}+(\sqrt{n+1})^2-\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}+1}$$

$$\leq 0 \qquad\qquad \leq 0$$

$$=\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(1-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+1}\geq 0$$

Donc $\sqrt{n+1}\leq 1+\frac{n}{\sqrt{n}+1}$

Donc P_{n+1} est vérifiée.

Ce qui achève la récurrence.

An $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1 .$$

$$\forall n \geq 0, \quad 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par le théorème des gendarmes on a que

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\boxed{\text{donc} \quad u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{n}}$$

Cscdo e g h i m n

p q r.

Limites de suites -

2) $\underbrace{\sqrt{x^2+x+1}}_{\infty} - \underbrace{(x+1)}_{\downarrow \atop \infty}$ $(x \to \infty)$

forme indeterminée

$$\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{(x+1)^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{(x+1)^2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1} = \frac{x^2+x+1-x^2-2x-1}{}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}$$

$$= \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}_{\to 2}}$$

Donc $\sqrt{x^2+x+1}-(x+1) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\frac{1}{2}$.

j) $\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$

Rappel
$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[0]{} 1 \\ \sin x \underset{0}{\sim} x\end{gathered}}$$

$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} 2\sqrt{x}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 0$

b) $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$

$\sin(3x) \underset{0}{\sim} 3x$

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

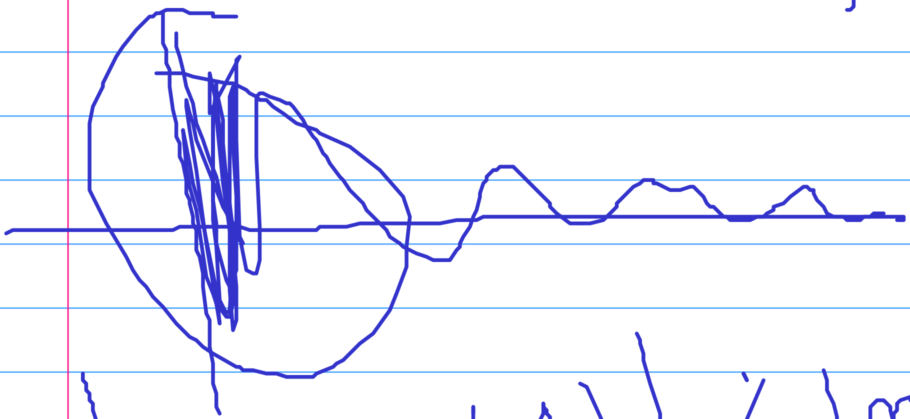
Donc $\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}$

i) $\boxed{\dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}}$ en 0

$$\frac{x^2}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \underset{0}{\sim} \boxed{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

1 a le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc $\dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

m) $\dfrac{\ln\left(\cos(3x)\right)}{\ln\left(\cos(2x)\right)}$

Rappel : esco 3

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

DL à l'ordre 2 de cos x

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$o(4x^2) = o(x^2)$$

$$\ln(\cos(3x)) = \ln(1 \overbrace{- 2x^2 + o(x^2)}^{X})$$

Rappel :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{x} o(x)\right)$$

$$= x(1 + o(1))$$

Posons $X = -2x^2 + o(x^2)$

$$X \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\ln(1+X) = X + o(X)$$

$$= -2x^2 + o_0(x^2)$$

$$+ o(-2x^2 + o(x^2))$$

$$\ln(1+X) = -2x^2 + o_0(x^2)$$

$$\ln(\cos(2x)) = -2x^2 + o_0(x^2)$$

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o_0(x^2)$$

$$\ln(\cos(3x)) = -\frac{9x^2}{2} + o_0(x^2)$$

$$\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \frac{-\frac{9}{2}x^2 + o_0(x^2)}{-2x^2 + o_0(x^2)}$$

$$= \frac{x^2\left(-\frac{9}{2} + o_0(1)\right)}{x^2\left(-2 + o_0(1)\right)}$$

$$= \frac{-\frac{9}{2} + o_0(1)}{-2 + o_0(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{9}{4}$$

$$\frac{\theta_2(1)}{1} : \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\theta_1(1) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

② $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

Car $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

Donc $\dfrac{\ln(1+x^2)}{(\sin x)^2} \sim \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{(\sin x)^2} = 1$

P) $$\lim_{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$$

⚠ $$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

$$= 1 + \frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\ln x}_{\to \infty}}$$

Donc $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow \, 7} \underbrace{(\ln x)^3}_{\downarrow \, \infty}$

Par les croissances comparées

$$\sqrt{x}\ \ln(x)^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Rappel : $x^{\alpha} |\ln(x)|^{\beta} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

dès que $\alpha > 0$

$$\sqrt{x}\ |\ln x|^{1000} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

1) $$\frac{\exp\left((\ln x)^2\right)}{x^n}$$

$$= \frac{\exp\left((\ln x)^2\right)}{e^{n\ln x}} = \exp\Big(\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{(\ln x)^2}} - \overset{\infty}{\overset{\uparrow}{n\ln x}}\Big)$$

$$= \exp\left((\ln x)^2\left(\underbrace{1}_{\downarrow\atop 1} - \underbrace{\frac{n}{\ln x}}_{\downarrow\atop 0}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

x 2

1) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$(f(x))^2 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

1ère méthode :

$$= 1 + x^2 + \cancel{\frac{x^4}{4}} + \cancel{\frac{x^6}{36}} + \cancel{o(x^6)}$$

$$+ 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \boxed{o(x^3)}$$

$$+ x^3 + \cancel{\frac{x^4}{3}} + \cancel{o(x^4)}$$

$$+ \cancel{\frac{x^5}{6}} + \cancel{o(x^5)} + \cancel{o(x^6)}$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

2ième méthode

$$f(x))^2 = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2$$

$$= 1 + x^2$$

$$+ 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$+ x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$f(2x) = 1 + (2x) + \frac{1}{2}(2x)^2$$

$$+ \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\underline{f(2x) = f(x)^2 + o(x^3)}$$

2) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$

$n \geqslant 1$.

$$(1+x+\cdots+x^n)(1-x) = 1 - x^{n+1}$$

$$= 1 + o(x^n)$$

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1+o(x^n)}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \boxed{\frac{o(x^n)}{1-x}} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{o(x^n)}{1-x} = o(x^n)$$

Donc $\boxed{1+x+\cdots+x^n = \frac{1}{1-x} + o(x^n)}$

$\longleftarrow$

$$o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$17\, o(x^n) = o(x^n) = -25\, o(x^n)$$

3) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-X}$ avec $X = -x$

si $x \to 0$ alors $X \to 0$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n + o(X^n)$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + o(x^n)$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + b^2 + 2ab)$$
$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$$

4) $$\frac{1}{1+\underbrace{x+2x^2+7x^3+o(x^3)}_{X}} = f(x)$$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

$$X = x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$$

Si : $x \to 0$ $\quad X \longrightarrow 0$

$$f(x) = 1 - \left(x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)\right)$$
$$+ \left(x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)\right)^2$$
$$- \left(x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = 1 - x - 2x^2 - 3x^3 + o(x^3)$$
$$+ x^2 + 4x^3$$
$$- x^3$$

$$f(x) = 1 - x - x^2 + o(x^3)$$

En exercice : question 5

Pour lundi
fin de l'exo 2, exo 7 et 8
de la feuille 8.

DM2 est en ligne
pour le 30 novembre.