exercice 2, question 5

$$f^{-1}(x) = 1 - \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + \underbrace{o(x^3)}_{o(x^3)}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^2 \cancel{+ x^3} \cancel{- x^3}$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= f(-x) + o(x^3).$$

DS 3

exo 1 : Etude de fonction.

		0	
$f'(x)$	+		+
f	↗		↗

$$x \longmapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2}$$

exo 2 :

$$\sum \sin(3) =$$

La méthode doit être connue.

exo 4

$$\cancel{\prod 1 + i}$$

feuille 8 : exos 7 et 8

exercice 7 :

a) (u_n) ne tend pas vers $+\infty$
b) $\exists$ sous suite majorée
c) $\exists$ sous-suite convergente.

a $\Rightarrow$ b

$u_n \to +\infty$: $\forall M, \exists N, \forall n \geq N, u_n \geq M$.

Dans notre cas u_n ne tend pas vers $+\infty$.

$\exists M, \forall N, \exists n \geq N, u_n < M$.

$N = 1 \quad \exists n_1 \geq 1, \quad u_{n_1} < M$

$N = n_1 + 1, \exists n_2 \geq n_1 + 1, \quad u_{n_2} < M$

$\vdots$

$N = n_k + 1, \exists n_{k+1} \geq n_k + 1, \quad u_{n_{k+1}} < M$

$\vdots$

On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{n_k} < M$

et de plus $n_{k+1} > n_k$.

Donc $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une sous suite majorée.

$b \Rightarrow c$ $\exists (n_k)$ tq (u_{n_k}) soit une sous suite majorée.

$\exists M$, $0 \leq u_{n_k} \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}$,

(u_{n_k}) est donc une suite bornée

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass donc on peut extraire de (u_{n_k}) une sous-suite convergente.

$c \Rightarrow a$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante et $(u_{\varphi(n)})$ est convergente.

Donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

$\Rightarrow \exists M, \forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_{\varphi(n)} \leq M$$

D'où (u_{φ}) ne peut pas tendre vers l'infini.

exo 8 : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|} \end{cases}$

1) Mq $u_n \leq n$

Preuve par récurrence.

P_n : " $u_n \leq n$ "

P_0 est vérifiée : $u_0 = 0 \leq 0$.

On suppose P_n et on montre P_{n+1}.

$$u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|} \geq 0$$

$$u_{n+1}^2 = |n^2 - u_n|$$ mais

$0 \leq u_n \leq n \leq n^2$ par P_n.

$$n^2 - u_n \geq 0$$

$$u_{n+1}^2 = n^2 - u_n$$

$$u_{n+1} = \sqrt{n^2 - u_n} \leq \sqrt{n^2}$$
$$= n \leq n+1.$$

Donc on a démontré P_{n+1}.
Ce qui achève la récurrence.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$.

2) Equivalent de (u_n)

$$u_{n+1}^2 = n^2 - u_n$$

$$0 < \frac{u_{n+1}^2}{n^2} = 1 - \frac{u_n}{n^2}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$0 \le u_n \le n$$

Donc $0 \le \dfrac{u_n}{n} \le 1$, $n \ge 1$

D'où

$$\frac{u_n}{n^2} = \underbrace{\frac{u_n}{n}}_{\text{bornée}} \times \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0}$$

Donc $\dfrac{u_n}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\frac{u_{n+1}^2}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ par

le théorème des gendarmes.

Puisque $u_{n+1} \geqslant 0$

$$\frac{u_{n+1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

De même, $\frac{u_{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

Feuille de TD n°9 :

exo 1 (a b)

exo 2, 3, 4, 5

exercice 1

Division euclidienne :

$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ \exists q \in \mathbb{N} \quad \exists ! \, r \in \{0, \dots b-1\}$

$$a = bq + r$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \ \exists ! \, q \in \mathbb{Z}, \ \exists ! \, r \in \{0, \dots, |b| - 1\}$

$$a = bq + r.$$

$$\begin{array}{l|l} 2867 & 6 \\ \hline 24 & 477 \\ \hline \ \ 46 & \\ \ \ 42 & \\ \hline \ \ \ 4\,2^{7} & \\ \hline \ \ \ \ \ 5 & \end{array}$$

$$2867 = 6 \times \underbrace{477}_{q} + \underbrace{5}_{r}$$

On a bien $5 \in \{0, \dots, 5\}$.

b) $a = 7813$, $b = -12$

$$\begin{array}{r|l} 7813 & -12 \\ \hline 72 & -651 \\ \hline 61 & \\ 60 & \\ \hline 13 & \\ 12 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc $7813 = \underbrace{-12 \times (-651)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$

reste = 1
quotient = -651

exercice 2 :

1) Si $b \mid a$ alors

$$2^b - 1 \mid 2^a - 1 .$$

On a il existe $k \in \mathbb{N}$ tq

$$a = kb .$$

$$2^a - 1 = 2^{kb} - 1$$

$$= \left(2^b\right)^k - 1$$

$$= X^k - 1 \qquad X = 2^b$$

$$= (X-1)\left(1 + X + \cdots + X^{k-1}\right)$$

$$= \underbrace{\left(2^b - 1\right)}\left(1 + 2^b + \cdots + \left(2^b\right)^{k-1}\right)$$

Donc $2^b - 1 \mid 2^a - 1$.

2) r est le reste de la division de a par b.

$a = qb + r$, $r \in \{0, \dots, b-1\}$

$2^a - 1 = 2^{qb+r} - 1$

$= 2^r\left(2^{qb} - 1\right) + 2^r - 1$

est un multiple de $2^b - 1$

c'est la question précédente.

Puisque $0 \leq r < b$ reste de la division euclidienne.

$0 \leq 2^r - 1 < 2^b - 1$

Donc $2^q - 1 = q\left(2^b - 1\right) + 2^r - 1$

exo 3 et 4 :

exo3 Mq qu'il n'existe pas de solution à l'équation

$$7a - 4b^3 = 1$$

Si il existe une solution alors

$$\underbrace{7a}_{=0} - 4b^3 = 1$$

Modulo 7 on a

$$-4b^3 \equiv 1 \quad [7]$$

Une idée est d'essayer $b = 1, 2, \dots, 7$ modulo 7 et de voir que ce n'est pas possible

$$-8b^3 \equiv 2 \quad [7]$$

$8b^3 \equiv -2 \; [7]$

mais $8 \equiv 1 \; [7]$

$b^3 \equiv -2 \; [7]$ ~~?~~

$b \in \{0, 1, \dots, 6\}$

$b = 0$ impossible

$b = 1$ impossible $1 \not\equiv -2 \; [7]$

$b = 2$, $2^3 = 8 \equiv 1 \; [7]$ impossible

$b = 3$, $3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$

$= 6 \; [7]$ impossible

$b = 4$, $4 \equiv -3 \; [7]$

$4^3 \equiv -27 \; [7]$

$\equiv -7 \times 4 + 1 \; [7]$

impossible

$b = 5$, $5 \equiv -2 \; [7]$

$5^3 \equiv -8 \; [7]$

$\equiv -1 \; [7]$ ~~impossible~~

$b = 6$ $6 \equiv -1 \; [7]$

$6^3 \equiv -1 \; [7]$

impossible

Donc il n'y a pas de solution à l'equation

$b^3 \equiv -2 \; [7]$.

Donc l'equation

$7a - 4b^3 = 1$

n'admet pas de solution.

Exercice 4 :

Question 1

a) $7^{k_0} \equiv 1 \; [12]$

$7^2 = 49 = 4 \times 12 + 1$

$7^2 \equiv 1 \; [12]$, $k_0 = 2$

b) $6^{k_1} \equiv 0 \; [12]$

$6^2 = 36 = 3 \times 12 \equiv 0 \; [12]$

donc $k_1 = 2$

c) $3^{k_2} \equiv 3^{k_3} \quad [12]$

et $k_2 < k_3$.

$3^2 = 9$

$3^3 = 27 = 2 \times 12 + 3$

$\equiv 3 \quad [12]$

$k_2 = 1$ et $k_3 = 3$

d) Reste de la division euclidienne par 12

$$7^{30} = (7^2)^{15}$$
$$\equiv 1^{15} \ [12]$$
$$\equiv 1 \ [12]$$

Donc le reste est 1

$$6^{13} = 6^2 \times 6^{11}$$
$$\equiv 0 \ [12]$$

Donc le reste est 0

12 divise 6^{13}

$$31^{77} = (2\times 12 + 7)^{77}$$
$$\equiv 7^{77} \ [12]$$

$$\equiv 7^{38 \times 2 + 1} \quad [12]$$

$$\equiv (7^2)^{38} \times 7 \quad [12]$$

$$\equiv 7 \quad [12]$$

Donc le reste est 7.

$$3^{17}$$

$$3 \equiv 3^3 \quad [12]$$

$$3^{17} = 3^{14} \times 3^3$$

$$\equiv 3^{14} \times 3 \quad [12]$$

$= 3^{15} [12]$

$= 3^{12+3} [12] = 3^{3}$

$= 3^{11} [12] = 3^{9} [12]$

$= 3^{7} [12] = 3^{5} [12]$

$= 3^{3} [12] = 3 [12]$

Le rest est donc 3.

$19^{5} + 30^{144} + 15^{10}$

$19 = 12 + 7$

$30 = 2 \times 12 + 6$

$15 = 12 + 3$

$A = 15^{5} + 30^{144} + 15^{10}$

$\equiv 7^{5} + 6^{144} + 3^{10} \quad [12]$

$\equiv (7^{2})^{2} \times 7 + (6^{2})^{72} + 3^{2+2+2+2+2} \quad [12]$

$7^{2} \equiv 1 \quad [12] \quad , \quad 6^{2} \equiv 0 \quad [12]$

$\equiv 7 + 0 + 3^{10} \quad [12]$

$3^{10} \equiv 3^{8} \quad [12] \equiv 3^{6} \quad [12]$

$\equiv 3^{4} \quad [12] \equiv 3^{2} \quad [12]$

$A \equiv 7 + 9 \quad [12]$

$\equiv 16 \quad [12]$

$\equiv 4 \quad [12]$

Le reste est donc 4.

2) $2^{123} + 3^{121}$ est divisible par 11.

Petit théorème de Fermat

Si p est premier alors $a^p \equiv a \; [p]$

Grand théorème de Fermat

$a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solution $(a,b,c) \in \mathbb{N}^*$ si $n \geq 3$.

$n=2$ $a=3$, $b=4$ et $c=5$

$2^{11} \equiv 2 \; [11]$

$3^{11} \equiv 3 \; [11]$

Car 11 est un nombre premier. (Petit théorème de Fermat)

$2^{11} \equiv 2 \; [11]$

$2^{121} = \left(2^{11}\right)^{11}$

$\equiv 2^{11} \; [11]$

$\equiv 2 \; [11]$

$2^{123} = 2^2 \times 2^{121} \equiv 4 \times 2 \; [11]$

$2^{123} \equiv 8 \; [11]$

$3^{121} \equiv (3^{11})^{11}$

$\equiv 3^{11} \; [11]$

$\equiv 3 \; [11]$

$2^{123} + 3^{121} \equiv 8 + 3 \; [11]$

$\equiv 0 \; [11]$

donc $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$

3) Reste de 122^{137} par 9

$$122 = 90 + 32$$

$$\equiv 32 \quad [9]$$

$$\equiv 27 + 5 \quad [9]$$

$$\equiv 5 \quad [9]$$

$$122^{137} \equiv 5^{137} \quad [9]$$

$$5^2 = 25$$

$$5^2 \equiv 7 \quad [9]$$

$$5^3 \equiv 35 \quad [9]$$

$$\equiv -1 \quad [9]$$

$$5^6 \equiv 1 \quad [9]$$

$$137 = 120 + 17$$
$$= 6 \times 20 + 2 \times 6 + 5$$
$$= 22 \times 6 + 5$$

$$122^{137} \equiv 5^{137} \quad [9]$$
$$\equiv 5^{22 \times 6 + 5} \quad [9]$$
$$\equiv (5^6)^{22} \times 5^5 \quad [9]$$
$$\equiv 5^5 \quad [9]$$
$$\equiv 5^2 \times 5^3 \quad [9]$$
$$\equiv -7 \quad [9] \equiv 2 \quad [9]$$

le reste de la

division euclidienne

est 2.

exercice 5

Demain

les 5, 6, 7