Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2020-2021

Math I - PM

Devoir n° 1

À RENDRE POUR LE 13/10/2020

La qualité et la propreté de la rédaction seront prises en compte.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice,on pourra admettre le résultat de la question et traiter les autres questions.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Calculer la valeur de S_1, S_2 et S_3.
2. Trouver trois réels a, b, c tels que
$$\forall k \in \mathbf{N},\ k \geq 1, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
3. Trouver la valeur de S_n comme une fonction de n.
4. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On rappelle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, on a :
$$\binom{n}{k+1} \ = \ \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, si $k \leq \frac{n-1}{2}$, alors on a :
$$\binom{n}{k} \ \leq \ \binom{n}{k+1}.$$
3. On suppose n impair.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)/2]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n-1)/2}$.
   (b) En déduire que, pour tout $k \in [\![(n+1)/2, n]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n+1)/2}$.
   (c) Conclure que
$$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} \ = \ \binom{n}{(n-1)/2}.$$
4. On suppose n pair. Proposer, *sans démonstration*, une valeur pour $\displaystyle\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}$.

Exercice 3. Déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \, |x|\,(1+2y^2) \ ; \ x \in [-2,-1] \cup [3,4], \ y \in [-1,2] \, \right\} \\ B &= \left\{ \, \frac{|1+y^2|}{x-3} \ ; \ (x,y) \in [0,2] \times [-2,1] \, \right\} . \end{aligned}$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $\sqrt{x} \leq x$.
2. En notant $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière, on a, pour tout couple de réels $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\lfloor x \cdot y \rfloor = \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$.
3. Pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$.
4. Il existe un couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que $4y \leq x \leq y$.
5. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \mapsto (1-x)$ est la seule fonction pour laquelle pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

   $$f(y - f(x)) = 2 - x - y \text{ \textit{(Indice : choisir un } } y \text{ \textit{en particulier).}}$$

6. La fonction

   $$h : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}; x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

   est bijective.
7. Pour tout triplet de parties $(A,B,C) \in \mathcal{P}(\mathbf{R})^3$, si $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ sont non vides, alors $A \cap B \cap C$ est non vide.
8. La phrase « S'il ne pleut pas demain, alors je vais chez ma tante et mon oncle », a la même valeur de vérité que la phrase « Si je vais chez mon oncle et ma tante, alors il ne pleut pas demain ».