
DM n° 2

Exercice 1. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction f définie comme suit :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1+x^n}{(1+x)^n}. \end{array}$$

1. Calculer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$.
3. En déduire que f admet un minimum sur $[0,+\infty[$ et le préciser.
4. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
5. Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 2.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
2. On considère l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2+1}). \end{array}$$

   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f est injective.

   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(\mathrm{sh}(y)) = y$. Que peut-on en déduire ?

   (d) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $P(z) = z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1. (a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions.

   (b) Montrer que z_1 et z_2 ont le même module, qui est noté r.
2. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$.

   (b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, on a $P(z)\left(\dfrac{1}{z-z_1} + \dfrac{1}{z-z_2}\right) = 2z - (z_1 + z_2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1, la partie réelle de $\dfrac{1}{1-z}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{|w| - w}$.

   (c) Déduire de (2b) et (3b) la partie réelle de $\dfrac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)}$.

Exercice 4. `Vrai ou faux`

Pour chacune des propositions entre guillemets, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. « Pour tout ensemble E et toute application $f : E \to E$, si $f(f(E)) = E$, alors f est surjective. »
2. Pour tout ensemble E et toutes parties A et B de E, notons $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   « Pour tout ensemble E et toute partie A de E, il existe une partie B de E telle que $A \triangle B = E$. »
3. « Pour tous ensembles finis A et B, si $\mathrm{card}(A) > \mathrm{card}(B)$, alors toutes les applications de A dans B sont surjectives. »
4. « La fonction
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
   est injective, et elle n'est pas strictement monotone. »
5. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
   « L'application
$$\begin{array}{rcl} \partial : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$
   est injective. »

Exercice 5. On suppose que les fonctions sont bien infiniment dérivables sur leur domaine de définition, ce n'est pas nécessaire de le montrer.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et la fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   En déduire, pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$.
2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   En déduire, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$.
3. Soit les fonctions f, g et h de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$ et $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f'(x)$, $f''(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
   (b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une expression de $h^{(n)}$