

---

**Feuille d'exercices n° 5**  
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

---

**Exercice 1.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur  $I$  et à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs :

- a) la fonction  $f$  s'annule ;
- b) la fonction  $f$  est toujours nulle ;
- c)  $f$  n'est pas une fonction constante ;
- d)  $f$  est croissante ;
- e)  $f$  est décroissante ;
- f)  $f$  présente un minimum ;
- g)  $f$  présente un maximum.

**Exercice 2.** Donner la négation des assertions de l'exercice précédent.

**Exercice 3.** Soit  $E$  un ensemble et  $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ .

1. Montrer  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$  et  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .
2. Montrer l'équivalence des propositions :
  - a)  $A \subset B$
  - b)  $A \cap B = A$
  - c)  $A \cup B = B$
  - d)  $A \setminus B = \emptyset$
3. Montrer l'équivalence des propositions :
  - a)  $A \cup B = A \cap C$
  - b)  $B \subset A \subset C$
4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C.$$

**Exercice 4.** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $n \mapsto n + 1$
- b)  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $n \mapsto n + 1$
- c)  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (2x - y, 4x - 2y)$
- d)  $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

**Exercice 5.** Soient :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont-elles injectives, surjectives ? Comparer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 6.** Soit  $f$  l'application de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  dans lui-même définie par  $f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$ . Déterminer  $f^{-1}(A)$  lorsque  $A = \{2\}, A = \{1, 2\}, A = \{3\}$ .

**Exercice 7.** Soit  $f$  une application de  $E$  vers  $F$  avec  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) = n$ . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $f$  est injective;                      b)  $f$  est surjective;                      c)  $f$  est bijective.

**Exercice 8.** Pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  on désigne par  $I_n$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

1. On suppose  $n \geq 2$ . Combien y a-t-il d'applications injectives  $f : I_2 \rightarrow I_n$ ?
2. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de  $I_p$  dans  $I_n$ ?
3. A quelle condition portant sur les entiers  $m$  et  $n$  peut-on définir une application  $f : I_m \rightarrow I_n$  qui soit injective, surjective, bijective?

**Exercice 9.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il y a  $n!$  bijections de  $E$  vers  $E$ .

**Exercice 10.**

Soit  $E$  un ensemble, avec  $\text{Card}(E) = n$ . Démontrer que  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ ,

- en utilisant les coefficients  $\binom{n}{k}$ ;
- en raisonnant par récurrence sur  $n$ .

**Exercice 11.** Montrer que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable à l'aide de l'application  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

$$\varphi(n) = 2n - 1 \text{ si } n > 0 \text{ et } \varphi(n) = -2n \text{ si } n \leq 0.$$

**Exercice 12.** Soient  $E, F$  deux ensembles non vides. Soient  $A$  une partie de  $E$ ,  $B$  une partie de  $F$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si  $A$  est une partie finie de  $E$ , alors  $f(A)$  est une partie finie de  $F$ .
2. Si  $f(A)$  est une partie finie de  $F$ , alors  $A$  est une partie finie de  $E$ .
3. Si  $B$  est une partie finie de  $F$ , alors  $f^{-1}(B)$  est une partie finie de  $E$ .
4. Si  $f^{-1}(B)$  est une partie finie de  $E$ , alors  $B$  est une partie finie de  $F$ .

**Exercice 13.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dénombrer les couples d'entiers  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tels que

- a)  $n_1 + n_2 \leq n$ ,                                              b)  $n_1 + n_2 = n$ .

Mêmes questions pour les triplets  $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ . Pouvez-vous généraliser aux cas des  $m$ -uplets?

*Indication :* il est utile et instructif de représenter les couples  $(n_1, n_2)$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et, pour la deuxième partie, les triplets  $(n_1, n_2, n_3)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 14.** Soient  $E$  un ensemble fini non vide,  $F$  un ensemble quelconque, et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ .

**Exercice 15.** Soient  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Soit  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$  une application. On suppose que pour tout  $x \in E$ , on a  $x \in f(x)$  et que pour tous  $x, y \in E$ , on a l'implication  $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in E$ , on a  $\text{Card } f(x) \geq 1$ .
2. On suppose qu'il existe  $a \in E$  tel que  $\text{Card } f(a) = n$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ , on a  $\text{Card } f(x) \geq 2$ .
3. Montrer qu'il existe des éléments  $x, y \in E$  différents tels que les ensembles  $f(x)$  et  $f(y)$  aient le même nombre d'éléments.

**Exercice 16.** Soit  $E$  un ensemble avec  $\text{Card}(E) = n$ .

1. Calculer le cardinal de l'ensemble  $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \subset B\}$ .  
*Indication : pour chaque  $B \subset E$ , compter les parties  $A \subset B$ .*
2. Montrer que pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ ,  $A \subset B$  équivaut à  $A^c \cup B = E$ .
3. En déduire le cardinal de l'ensemble  $\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 / A \cup B = E\}$ .

**Exercice 17.** Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$  ;
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$  ;
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$  ;
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$  et  $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ;
5.  $f : \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3|\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  et  $g : ]\frac{1}{3}, 7[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$  ;
6.  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sqrt{x})^2$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ .

**Exercice 18.** Décrire les ensembles qui suivent.

- |                                                                                   |                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\tan(\{0\})$                                                                  | b) $\sin^{-1}(\{2\})$                                                                                                     |
| c) $\cos^{-1}([0, 1])$                                                            | d) $(\cos  _{[3, 7]})^{-1}([0, 1])$                                                                                       |
| e) $(\cos  _{[0, \pi]})^{-1}([0, 1])$                                             | f) $\sqrt{\cdot}([0, 1])$                                                                                                 |
| g) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$   | h) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$                          |
| i) $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ | j) $f^{-1}([-1, 1] \cup \{2\})$ et $f^{-1}([0, 1]^3)$ pour $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto y$ |
| k) $ \cdot ([-2, -1] \cup [2, 4])$                                                | l) $( \cdot   _{[-8, 7]})^{-1}([2, 3])$                                                                                   |
| m) $ \cdot ^{-1}(\{1\})$                                                          | n) $\exp([\cdot - \infty, 2])$                                                                                            |
| o) $\exp^{-1}([-1, e])$                                                           | p) $\ln(\mathbb{R}_-)$                                                                                                    |
| q) $\ln^{-1}([3, +\infty])$                                                       |                                                                                                                           |

**Exercice 19.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \rightarrow F$ .

1. Soient  $A, B \subset E$ . Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

2. Pour l'inclusion de la question précédente, donner un contre-exemple à l'inclusion réciproque.

3. Soient maintenant  $A, B \subset F$ . Montrer que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

**Exercice 20.** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

a)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ ;

b)  $[\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ ;

c)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ;

d)  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ;

e)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$  ;

f)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$  ;

g)  $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto -(x - 1)$ ;

h)  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$ ;

i)  $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 7, 9, 11\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ .

**Exercice 21.** On considère l'application  $f : I \rightarrow J, x \mapsto x^2$ , où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Trouver  $I$  et  $J$  tels que :

1.  $f$  est injective mais pas surjective ;
2.  $f$  est surjective mais pas injective ;
3.  $f$  est bijective.

**Exercice 22.** Soit  $E$  un ensemble non vide. Soient  $f, g$  et  $h$  des fonctions de  $E$  dans  $E$ . On suppose  $h \circ g \circ f$  et  $g \circ f \circ h$  injectives et  $f \circ h \circ g$  surjective. Montrer que  $f, g$  et  $h$  sont bijectives.

**Exercice 23.** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

Étudier la surjectivité de  $f$  en considérant  $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ .

**Exercice 24.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \rightarrow F$ .

1. Montrer que, pour tout  $B \subset F$ ,  $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$ .
2. En déduire que si  $f$  est surjective alors, pour tout  $B \in \mathcal{P}(F)$ ,  $f(f^{-1}(B)) = B$ .
3. Montrer que, pour tout  $A \subset E$ ,  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .
4. Montrer que si  $f$  est injective alors, pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

**Exercice 25.** Pour chacune des relations définies ci dessous, déterminer si ce sont des relations d'ordre ou d'équivalence :

- Pour  $m$  et  $n$  deux entiers relatifs,  $n \equiv m$  si et seulement si 4 divise  $m - n$ .
- Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles,  $f \mathcal{R} g$  si et seulement si il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = g(x)$ .
- Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles,  $f \sim g$  si et seulement si il existe  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $f = h \cdot g$  et que  $h$  ait limite 1 en  $+\infty$ .
- Soit  $E$  un ensemble. On définit, pour  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $A \prec B$  si et seulement si il existe une fonction injective de  $A$  dans  $B$ .
- Soit  $E$  un ensemble. On définit, pour  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $A \bowtie B$  si et seulement  $A \cap B = \emptyset$ .
- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$ . On définit, pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $x \smile y$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$ .
- (\*) Soient  $E$  un ensemble et  $\ll$  une relation réflexive et transitive sur ces éléments. Soit  $X = \{\{y \in E, x \ll y \text{ et } y \ll x\}, x \in E\}$ . On définit pour  $A$  et  $B$  deux éléments de  $X$ ,  $A \lll B$  si et seulement il existe  $a$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$  tels que  $a \ll b$ .

**Exercice 26. Indicatrice d'une partie d'un ensemble**

Soit  $E$  un ensemble. On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble de parties de  $E$ . Soit  $A$  une partie de  $E : A \in \mathcal{P}(E)$ . On note  $\bar{A} = E \setminus A$ , le complémentaire de  $A$  dans  $E$ .

Pour tout  $A \subset E$  on définit une fonction *indicatrice de A* sur  $E$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , notée  $\mathbf{1}_A$ , définie pour  $\forall x \in E$  par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

1. On considère deux exemples :

- Soient  $E = \{a, b, c, d\}$ ,  $A = \{a, b, c\} \subset E$  et  $B = \{c, d\} \subset E$ . Expliciter les fonctions  $\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_\emptyset, \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{\bar{A}}, \mathbf{1}_B$  ainsi que  $\mathbf{1}_{A \cap B}$  et  $\mathbf{1}_{A \cup B}$ .
- Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbf{1}_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0; 1\}$  sa fonction indicatrice sur  $\mathbb{R}$ . Décrire les ensembles  $\mathbf{1}_A(A), \mathbf{1}_A(\bar{A}), \mathbf{1}_A(\mathbb{R}), \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}), \mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}), \mathbf{1}_A^{-1}(\{0; 1\})$ .

2. Soient  $E$  un ensemble et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Démontrer les propriétés de la fonction indicatrice :

- Montrer que  $(\mathbf{1}_A)^2 = \mathbf{1}_A$ .
- Inclusion :  $A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ . (Cela veut dire que pour  $\forall x \in E$ , on a  $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$ .)  
Égalité :  $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ .
- Opérations ensemblistes :

$$\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A; \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B; \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B.$$

- Lien avec le cardinal : si  $E$  est de cardinal fini,  $|A| = \sum_{x \in E} \mathbf{1}_A(x)$ .

3. Formule du crible. Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

4. Soit  $E$  un ensemble fini de cardinalité  $n$ . Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ .

(a) Quel est le cardinal de  $\mathcal{F}$  ?

(b) Soit

$$\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F} : A \mapsto \mathbf{1}_A$$

une application qui à chaque partie  $A$  de  $E$  associe sa fonction indicatrice. Montrer que  $\phi$  est une application injective. En déduire que  $\phi$  est bijective.

(c) En déduire que  $\mathcal{P}(E)$  est fini et calculer son cardinal.

5. Soit  $E$  un ensemble fini de cardinalité  $n$ . Calculer  $\sum_{A, B \subseteq E} |A \cap B|$ ,  $\sum_{A, B \subseteq E} |A \cup B|$ .