

Feuille d'exercices n° 7a

NOMBRES COMPLEXES (PREMIÈRE PARTIE : SANS LA FORME TRIGONOMETRIQUE)

1. Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

1. Calculer i^n , $n \in \mathbf{Z}$.
2. Calculer $(1 + i)^8$.

Exercice 2.

1. Écrire le conjugué de $z = \frac{4 - 5i}{3 + i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Soit z un complexe. Exprimer le conjugué de $w = \frac{2z^2 - i}{5z + 1}$ en fonction de \bar{z} .

Exercice 3.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Exercice 4. On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n et des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.
Soit z un nombre complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\bar{z}) = 0$
2. Calculer $j\bar{j}$ et $j + \bar{j}$.
3. En déduire $j(-1 - j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
4. À la lumière des questions précédentes, résoudre l'équation $z^3 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
5. Sans calculer $1/j$ ni j^2 , utiliser la question 4. pour justifier que $\bar{j} = \frac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{iz - 1}{z - i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soient u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.

Soient u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe z , le nombre complexe $\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.

1. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{C} . Pour quelle valeur de $t \in \mathbf{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme

$$X^3 + 3pX + q$$

avec $p, q \in \mathbf{C}$?

2. Soient $p, q \in \mathbf{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α .

(a) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q .

(b) Démontrer que $\gamma_k - \frac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.

3. On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.

(a) Appliquer à P le procédé de la question 1.

(b) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P , puis celles de P , en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

2. Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $\Delta_1 = 49$

b) $\Delta_2 = -25$

c) $\Delta_3 = 50i$

d) $\Delta_4 = 3 + 4i$

e) $\Delta_5 = 8 - 6i$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

a) $z^2 + 2z + 10 = 0$

b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante : $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbf{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.

2. Pour $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.

3. Résoudre l'équation.