Calcul fonctionnel et semi-groupes analytiques sur les espaces L^p non commutatifs

Cédric Arhancet

Université de Franche-Comté

Lyon, octobre 2013

Plan

1. Semigroupes et calcul H^∞
2. Semigroupes sur les espaces L^p non commutatifs
3. Analyticité
4. R-Analyticité

Plan

Semigroupes et générateurs

Définition

Un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X

Semigroupes et générateurs

Définition

Un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ où $T_t\colon X \to X$ telle que :

$$T_0 = I, \quad \text{et} \quad T_{t+s} = T_t T_s, \qquad t, s \geq 0$$

Définition

Un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ où $T_t \colon X \to X$ telle que :

$$T_0 = I, \quad \text{et} \quad T_{t+s} = T_t T_s, \qquad t, s \geq 0$$

avec

$$t \mapsto T_t x$$

continue pour tout $x \in X$.

Semigroupes et générateurs

Définition

Un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ où $T_t \colon X \to X$ telle que :

$$T_0 = I, \quad \text{et} \quad T_{t+s} = T_t T_s, \qquad t, s \geq 0$$

avec

$$t \mapsto T_t x$$

continue pour tout $x \in X$.

On note $-A$ le générateur. Rappelons que

$$-Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t x - x), \qquad x \in D(A).$$

Semigroupes et générateurs

Définition

Un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs $(T_t)_{t\geq 0}$ où $T_t \colon X \to X$ telle que :

$$T_0 = I, \quad \text{et} \quad T_{t+s} = T_t T_s, \qquad t, s \geq 0$$

avec

$$t \mapsto T_t x$$

continue pour tout $x \in X$.

On note $-A$ le générateur. Rappelons que

$$-Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t x - x), \qquad x \in D(A).$$

On note symboliquement $T_t = e^{-tA}$.

Exemple

Le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

Exemple

Le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

permet de définir le semigroupe de Poisson $(T_t)_{t \geq 0}$ par

$$\begin{array}{rccc} T_t\colon & L^\infty(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & P_{e^{-t}} * f. \end{array}$$

Exemple

Le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

permet de définir le semigroupe de Poisson $(T_t)_{t \geq 0}$ par

$$\begin{array}{rccc} T_t \colon & L^\infty(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & P_{e^{-t}} * f. \end{array}$$

On a

$$T_t(e^{ik\cdot}) = e^{-t|k|} e^{ik\cdot}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

permet de définir le semigroupe de Poisson $(T_t)_{t \geq 0}$ par

$$T_t\colon \begin{array}{ccc} L^\infty(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}) \\ f & \longmapsto & P_{e^{-t}} * f. \end{array}$$

On a

$$T_t(e^{ik\cdot}) = e^{-t|k|}e^{ik\cdot}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il induit un C_0-semigroupe d'applications contractantes :

$$T_t\colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T}), \qquad 1 < p < \infty.$$

Exemple

Le noyau de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

permet de définir le semigroupe de Poisson $(T_t)_{t \geq 0}$ par

$$\begin{array}{rccc} T_t : & L^\infty(\mathbb{T}) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & P_{e^{-t}} * f. \end{array}$$

On a

$$T_t(e^{ik\cdot}) = e^{-t|k|}e^{ik\cdot}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il induit un C_0-semigroupe d'applications contractantes :

$$T_t \colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T}), \qquad 1 < p < \infty.$$

On a

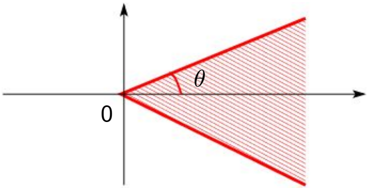
$$A(e^{ik\cdot}) = |k|e^{ik\cdot}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Semigroupes analytiques

Pour tout $0 < \theta < \pi$

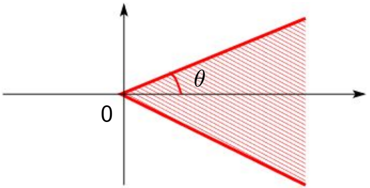
Semigroupes analytiques

Pour tout $0 < \theta < \pi$, on note $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour de $\mathbb{R}^+$.



Semigroupes analytiques

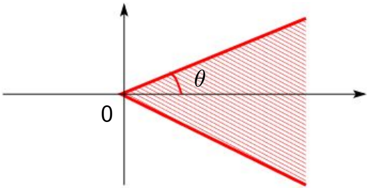
Pour tout $0 < \theta < \pi$, on note $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour de $\mathbb{R}^+$.



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X.

Semigroupes analytiques

Pour tout $0 < \theta < \pi$, on note $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : -\theta < \mathrm{Arg}(z) < \theta\}$ le secteur ouvert d'angle 2θ autour de $\mathbb{R}^+$.



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X.

On dit qu'il est analytique quand $(T_t)_{t>0}$ admet une extension analytique borné

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\theta & \longrightarrow & B(X) \\ z & \longmapsto & T_z \end{array}$$

pour un certain $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

R-bornitude

On considère une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ de variables de Rademacher indépendantes sur un espace de probabilité Ω_0.

R-bornitude

On considère une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ de variables de Rademacher indépendantes sur un espace de probabilité Ω_0. On note

$$\mathrm{Rad}(X) \subset L^2(\Omega_0, X)$$

le sous-espace fermé engendré par les $\varepsilon_k \otimes x$.

R-bornitude

On considère une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ de variables de Rademacher indépendantes sur un espace de probabilité Ω_0. On note

$$\mathrm{Rad}(X) \subset L^2(\Omega_0, X)$$

le sous-espace fermé engendré par les $\varepsilon_k \otimes x$.

Définition

On dit qu'un ensemble $F \subset B(X)$ est R-borné s'il existe K telle que pour toute familles finies $T_1, \ldots, T_n$ de F et $x_1, \ldots, x_n$ de X, on ait

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \otimes T_k(x_k) \right\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \otimes x_k \right\|_{\mathrm{Rad}(X)}.$$

R-bornitude

On considère une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ de variables de Rademacher indépendantes sur un espace de probabilité Ω_0. On note

$$\mathrm{Rad}(X) \subset L^2(\Omega_0, X)$$

le sous-espace fermé engendré par les $\varepsilon_k \otimes x$.

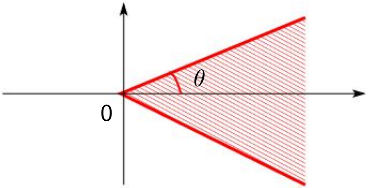
Définition

On dit qu'un ensemble $F \subset B(X)$ est R-borné s'il existe K telle que pour toute familles finies $T_1, \ldots, T_n$ de F et $x_1, \ldots, x_n$ de X, on ait

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \otimes T_k(x_k) \right\|_{\mathrm{Rad}(X)} \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \otimes x_k \right\|_{\mathrm{Rad}(X)}.$$

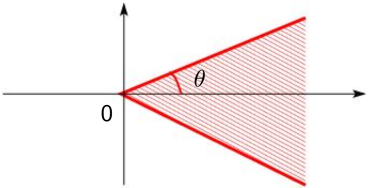
Sur un espace de Hilbert H, un sous-ensemble de $B(H)$ est borné ssi il est R-borné.

Semigroupes R-analytiques



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X.

Semigroupes R-analytiques



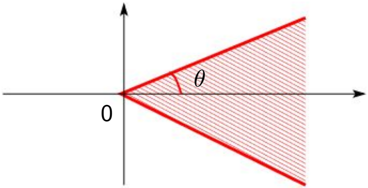
Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X.

On dit qu'il est R-analytique quand $(T_t)_{t>0}$ admet une extension analytique borné

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\theta & \longrightarrow & B(X) \\ z & \longmapsto & T_z \end{array}$$

pour un certain $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Semigroupes R-analytiques



Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un C_0-semigroupe sur un espace de Banach X.

On dit qu'il est R-analytique quand $(T_t)_{t>0}$ admet une extension analytique borné

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_\theta & \longrightarrow & B(X) \\ z & \longmapsto & T_z \end{array}$$

pour un certain $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ telle que

$$\{T(z) \colon z \in \Sigma_\theta\}$$

soit R-borné.

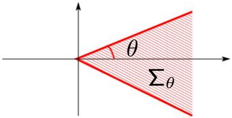
Théorème

Supposons $1 < p < \infty$. Le semigroupe de Poisson $(T_t)_{t \geq 0}$ est R-analytique sur $L^p(\mathbb{T})$.

Calcul fonctionnel H^∞

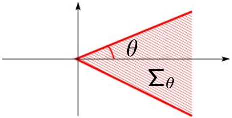
Considérons $0 < \theta < \pi$

Considérons $0 < \theta < \pi$ et



Calcul fonctionnel H^∞

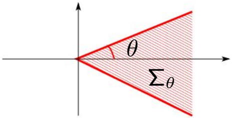
Considérons $0 < \theta < \pi$ et



$$H^\infty(\Sigma_\theta) = \{f \colon \Sigma_\theta \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ bornée analytique}\}.$$

Calcul fonctionnel H^∞

Considérons $0 < \theta < \pi$ et

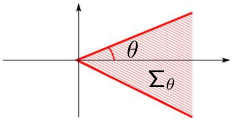


$$H^\infty(\Sigma_\theta) = \{f \colon \Sigma_\theta \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ bornée analytique}\}.$$

Soit $A \colon D(A) \to X$ un générateur à image dense d'un C_0-semigroupe.

Calcul fonctionnel H^∞

Considérons $0 < \theta < \pi$ et



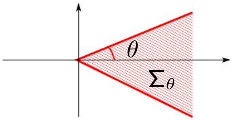
$$H^\infty(\Sigma_\theta) = \{f\colon \Sigma_\theta \to \mathbb{C} \;:\; f \text{ bornée analytique}\}.$$

Soit $A\colon D(A) \to X$ un générateur à image dense d'un C_0-semigroupe. Si θ est assez grand et $f \in H^\infty(\Sigma_\theta)$, on peut définir un opérateur

$$f(A).$$

Calcul fonctionnel H^∞

Considérons $0 < \theta < \pi$ et



$$H^\infty(\Sigma_\theta) = \{f \colon \Sigma_\theta \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ bornée analytique}\}.$$

Soit $A \colon D(A) \to X$ un générateur à image dense d'un C_0-semigroupe. Si θ est assez grand et $f \in H^\infty(\Sigma_\theta)$, on peut définir un opérateur

$$f(A).$$

Définition

A admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\theta)$ borné s'il existe K telle que

$$\|f(A)\|_{X \to X} \leq K \|f\|_{H^\infty(\Sigma_\theta)}, \qquad f \in H^\infty(\Sigma_\theta).$$

Théorème

Supposons $1 < p < \infty$. *Le semigroupe de Poisson* $(T_t)_{t \geq 0}$ *admet un calcul fonctionnel* $H^\infty(\Sigma_\theta)$ *borné sur* $L^p(\mathbb{T})$ *pour un* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Plan

1. Semigroupes et calcul H^∞
2. Semigroupes sur les espaces L^p non commutatifs
3. Analyticité
4. R-Analyticité

Dictionnaire :

commutatif	non commutatif

Mathématiques non commutatives

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur

Mathématiques non commutatives

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\\|x\\|_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\|x\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\|x\| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
Espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	Espace d'opérateurs E

Mathématiques non commutatives

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
Espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	Espace d'opérateurs E
Espace de Hilbert H	$\longleftrightarrow$	Espace OH de Pisier

Mathématiques non commutatives

Dictionnaire :

commutatif		non commutatif
fonction	$\longleftrightarrow$	opérateur
$L^\infty(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	M algèbre de von Neumann
$L^p(\Omega)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M)$
ℓ^p	$\longleftrightarrow$	S^p
$\left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$	$\longleftrightarrow$	$\lVert x\rVert_{S^p} = \left(\mathrm{Tr}\,\lvert x\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $\lvert x\rvert = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$
Espace de Banach X	$\longleftrightarrow$	Espace d'opérateurs E
Espace de Hilbert H	$\longleftrightarrow$	Espace OH de Pisier
$L^p(\Omega, X)$	$\longleftrightarrow$	$L^p(M, E)$

Soit G un groupe discret.

Algèbres de groupes

Soit G un groupe discret.
On note $(\delta_g)_{g \in G}$ la base canonique de ℓ^2_G.

Algèbres de groupes

Soit G un groupe discret.
On note $(\delta_g)_{g \in G}$ la base canonique de ℓ^2_G.
Soit λ_g la représentation régulière gauche de G sur ℓ^2_G, i.e.

$$\begin{array}{rccc} \lambda_g : & \ell^2_G & \longrightarrow & \ell^2_G \\ & \delta_h & \longmapsto & \delta_{gh}. \end{array}$$

Algèbres de groupes

Soit G un groupe discret.
On note $(\delta_g)_{g \in G}$ la base canonique de ℓ^2_G.
Soit λ_g la représentation régulière gauche de G sur ℓ^2_G, i.e.

$$\begin{array}{rccc} \lambda_g : & \ell^2_G & \longrightarrow & \ell^2_G \\ & \delta_h & \longmapsto & \delta_{gh}. \end{array}$$

On définit l'algèbre de von Neumann par

$$\mathcal{L}G = \overline{\mathrm{vect}\{\lambda_g : g \in G\}}^{w^*} \subset B(\ell^2_G).$$

Algèbres de groupes

Soit G un groupe discret.
On note $(\delta_g)_{g \in G}$ la base canonique de ℓ^2_G.
Soit λ_g la représentation régulière gauche de G sur ℓ^2_G, i.e.

$$\begin{array}{cccc} \lambda_g : & \ell^2_G & \longrightarrow & \ell^2_G \\ & \delta_h & \longmapsto & \delta_{gh}. \end{array}$$

On définit l'algèbre de von Neumann par

$$\mathcal{L}G = \overline{\mathrm{vect}\{\lambda_g : g \in G\}}^{w^*} \subset B(\ell^2_G).$$

On peut définir une trace par

$$\mathrm{Tr}\,(x) = \langle \delta_e, x\delta_e \rangle_{\ell^2_G}, \qquad x \in \mathcal{L}G \quad (e \text{ neutre de } G).$$

Algèbres de groupes

Soit G un groupe discret.
On note $(\delta_g)_{g\in G}$ la base canonique de ℓ^2_G.
Soit λ_g la représentation régulière gauche de G sur ℓ^2_G, i.e.

$$\lambda_g : \begin{array}{ccc} \ell^2_G & \longrightarrow & \ell^2_G \\ \delta_h & \longmapsto & \delta_{gh}. \end{array}$$

On définit l'algèbre de von Neumann par

$$\mathcal{L}G = \overline{\mathrm{vect}\{\lambda_g : g \in G\}}^{w^*} \subset B(\ell^2_G).$$

On peut définir une trace par

$$\mathrm{Tr}\,(x) = \langle \delta_e, x\delta_e \rangle_{\ell^2_G}, \qquad x \in \mathcal{L}G \quad (e \text{ neutre de } G).$$

On définit le complété $L^p(\mathcal{L}G)$ de $\mathcal{L}G$ pour la norme

$$\|x\|_{L^p(\mathcal{L}G)} = \mathrm{Tr}\,(|x|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.
Tout $g \in \mathbb{F}_n$ admet une unique décomposition

$$g = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_l}^{k_l},$$

où $1 \leq i_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{Z}^*$, et $i_j \neq i_{j+1}$.

Semigroupe de Poisson non commutatif

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.
Tout $g \in \mathbb{F}_n$ admet une unique décomposition

$$g = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_l}^{k_l},$$

où $1 \leq i_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{Z}^*$, et $i_j \neq i_{j+1}$.
La longueur g est

$$|g| = |k_1| + \cdots + |k_l|.$$

Semigroupe de Poisson non commutatif

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.
Tout $g \in \mathbb{F}_n$ admet une unique décomposition

$$g = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_l}^{k_l},$$

où $1 \leq i_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{Z}^*$, et $i_j \neq i_{j+1}$.
La longueur g est

$$|g| = |k_1| + \cdots + |k_l|.$$

Pour tout $t \geq 0$, on a une contraction

$$\begin{array}{cccc} T_t : & \mathcal{L}F_n & \longrightarrow & \mathcal{L}F_n \\ & \lambda_g & \longmapsto & e^{-t|g|}\lambda_g. \end{array}$$

Semigroupe de Poisson non commutatif

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.
Tout $g \in \mathbb{F}_n$ admet une unique décomposition

$$g = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_l}^{k_l},$$

où $1 \leq i_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{Z}^*$, et $i_j \neq i_{j+1}$.
La longueur g est

$$|g| = |k_1| + \cdots + |k_l|.$$

Pour tout $t \geq 0$, on a une contraction

$$\begin{array}{rccc} T_t: & \mathcal{L}F_n & \longrightarrow & \mathcal{L}F_n \\ & \lambda_g & \longmapsto & e^{-t|g|}\lambda_g. \end{array}$$

On obtient le semigroupe de Poisson non-commutatif (Haagerup).

Semigroupe de Poisson non commutatif

Désormais $G = \mathbb{F}_n$ est le groupe libre à n générateurs $g_1, \ldots, g_n$.
Tout $g \in \mathbb{F}_n$ admet une unique décomposition

$$g = g_{i_1}^{k_1} g_{i_2}^{k_2} \cdots g_{i_l}^{k_l},$$

où $1 \leq i_j \leq n$, $k_j \in \mathbb{Z}^*$, et $i_j \neq i_{j+1}$.
La longueur g est

$$|g| = |k_1| + \cdots + |k_l|.$$

Pour tout $t \geq 0$, on a une contraction

$$\begin{array}{rccc} T_t : & \mathcal{L}F_n & \longrightarrow & \mathcal{L}F_n \\ & \lambda_g & \longmapsto & e^{-t|g|}\lambda_g. \end{array}$$

On obtient le semigroupe de Poisson non-commutatif (Haagerup).

Il induit un C_0-semigroupe sur $L^p(\mathcal{L}F_n)$.

Espaces L^p vectoriels

- Si X est un espace de Banach et Ω un espace mesuré, on peut définir les espaces de Bochner

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \to X : \int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p \, d\omega < \infty \right\}.$$

Espaces L^p vectoriels

- Si X est un espace de Banach et Ω un espace mesuré, on peut définir les espaces de Bochner

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \to X : \int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\omega < \infty \right\}.$$

- Soit E un espace d'opérateurs, i.e. un sous-espace fermé de $B(\ell^2)$.

Espaces L^p vectoriels

- Si X est un espace de Banach et Ω un espace mesuré, on peut définir les espaces de Bochner

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \to X : \int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\omega < \infty \right\}.$$

- Soit E un espace d'opérateurs, i.e. un sous-espace fermé de $B(\ell^2)$. On peut définir les espaces L^p non commutatifs

$$L^p(\mathcal{L}G, E)$$

à valeurs dans E.

Espaces L^p vectoriels

- Si X est un espace de Banach et Ω un espace mesuré, on peut définir les espaces de Bochner

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \to X : \int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\omega < \infty \right\}.$$

- Soit E un espace d'opérateurs, i.e. un sous-espace fermé de $B(\ell^2)$. On peut définir les espaces L^p non commutatifs

$$L^p(\mathcal{L}G, E)$$

  à valeurs dans E.
- Dans la suite, $E = OH$ désigne l'espace d'opérateurs hilbertien analogue de ℓ^2 introduit par Pisier.

Théorème principal

Théorème (A.)

- *Le semigroupe de Poisson non commutatif* $(T_t)_{t\geq 0}$ *sur*

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH)$$

Théorème principal

Théorème (A.)

- *Le semigroupe de Poisson non commutatif* $(T_t)_{t\geq 0}$ *sur*

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH)$$

est R-analytique pour $1 < p < \infty$.

Théorème principal

Théorème (A.)

- *Le semigroupe de Poisson non commutatif* $(T_t)_{t \geq 0}$ *sur*

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH)$$

est R-analytique pour $1 < p < \infty$.

- *Son générateur A admet un calcul fonctionnel* $H^\infty(\Sigma_\theta)$ *borné pour un* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Théorème principal

Théorème (A.)

- *Le semigroupe de Poisson non commutatif* $(T_t)_{t \geq 0}$ *sur*

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH)$$

est R-analytique pour $1 < p < \infty$*.*

- *Son générateur A admet un calcul fonctionnel* $H^\infty(\Sigma_\theta)$ *borné pour un* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$*.*

- On peut remplacer OH par un espace d'interpolation

$$E = (OH, F)_\alpha$$

où $0 < \alpha < 1$ et où F possède $OUMD'_q$ pour un certain q.

Théorème (A.)

- *Le semigroupe de Poisson non commutatif* $(T_t)_{t\geq 0}$ *sur*

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH)$$

  est R-analytique pour $1 < p < \infty$.
- *Son générateur A admet un calcul fonctionnel* $H^\infty(\Sigma_\theta)$ *borné pour un* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- On peut remplacer OH par un espace d'interpolation

$$E = (OH, F)_\alpha$$

  où $0 < \alpha < 1$ et où F possède $OUMD'_q$ pour un certain q.
- $OUMD'_q$ désigne une propriété similaire à la propriété d'*inconditionnalité des différences de martingales* (UMD) des espaces de Banach.

Plan

1. Semigroupes et calcul H^∞
2. Semigroupes sur les espaces L^p non commutatifs
3. **Analyticité**
4. R-Analyticité

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's ssi

Analyticité pour les espaces de Bochner

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's ssi
la projection de Rademacher $P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(\Omega, X)$.

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's
ssi
la projection de Rademacher $P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(\Omega, X)$.

Pour prouver ce théorème, il a utilisé une généralisation du résultat suivant.

Analyticité pour les espaces de Bochner

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's ssi
la projection de Rademacher $P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(\Omega, X)$.

Pour prouver ce théorème, il a utilisé une généralisation du résultat suivant.

Théorème (Pisier)

- *Soit X un espace K-convexe.*

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's ssi
la projection de Rademacher $P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(\Omega, X)$.

Pour prouver ce théorème, il a utilisé une généralisation du résultat suivant.

Théorème (Pisier)

- *Soit X un espace K-convexe.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semigroupe de Poisson.*

Analyticité pour les espaces de Bochner

Un célèbre théorème de Pisier dit que :

un espace X est K-convexe, i.e. ne contient pas uniformément les ℓ_n^1's
ssi
la projection de Rademacher $P \otimes Id_X$ est borné sur $L^2(\Omega, X)$.

Pour prouver ce théorème, il a utilisé une généralisation du résultat suivant.

Théorème (Pisier)

- *Soit X un espace K-convexe.*
- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semigroupe de Poisson.*

Alors $(T_t \otimes Id_X)_{t \geq 0}$ est analytique sur $L^p(\mathbb{T}, X)$ pour tout $1 < p < \infty$.

On dit qu'un espace d'opérateurs E est OK-convexe si $S^p(E)$ est K-convexe pour un (tout) $1 < p < \infty$.

On dit qu'un espace d'opérateurs E est OK-convexe si $S^p(E)$ est K-convexe pour un (tout) $1 < p < \infty$.

Théorème (A.)

- *Soit* $(T_t)_{t \geq 0}$ *le semigroupe de Poisson non commutatif.*

On dit qu'un espace d'opérateurs E est OK-convexe si $S^p(E)$ est K-convexe pour un (tout) $1 < p < \infty$.

Théorème (A.)

- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semigroupe de Poisson non commutatif.*
- *Soit E un espace OK-convexe.*

On dit qu'un espace d'opérateurs E est OK-convexe si $S^p(E)$ est K-convexe pour un (tout) $1 < p < \infty$.

Théorème (A.)

- *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semigroupe de Poisson non commutatif.*
- *Soit E un espace OK-convexe.*

Alors $(T_t \otimes Id_E)_{t \geq 0}$ est analytique sur

$$L^p(\mathcal{L}F_n, E)$$

pour tout $1 < p < \infty$.

Plan

1. Semigroupes et calcul H^∞
2. Semigroupes sur les espaces L^p non commutatifs
3. Analyticité
4. R-Analyticité

$OUMD_p$ et espérances conditionnelles

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Théorème (A.)

- *Soit M une algèbre de VN ($=$ espace $L^\infty(\Omega)$ non commutatif)*

$OUMD_p$ et espérances conditionnelles

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Théorème (A.)

- *Soit M une algèbre de VN ($=$ espace $L^\infty(\Omega)$ non commutatif) avec QWEP et munie d'une trace.*

$OUMD_p$ et espérances conditionnelles

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Théorème (A.)

- *Soit M une algèbre de VN ($=$ espace $L^\infty(\Omega)$ non commutatif) avec QWEP et munie d'une trace.*
- *Soit E un espace d'opérateurs $OUMD'_p$.*

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Théorème (A.)

- *Soit M une algèbre de VN (= espace $L^\infty(\Omega)$ non commutatif) avec QWEP et munie d'une trace.*
- *Soit E un espace d'opérateurs $OUMD'_p$.*
- *Considérons une suite décroissante de sous-algèbres de M :*

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots .$$

Il faut faire apparaitre de la R-bornitude.

Théorème (A.)

- *Soit M une algèbre de VN ($=$ espace $L^\infty(\Omega)$ non commutatif) avec QWEP et munie d'une trace.*
- *Soit E un espace d'opérateurs $OUMD'_p$.*
- *Considérons une suite décroissante de sous-algèbres de M :*

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots .$$

Alors l'ensemble des espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}_k \otimes Id_E \colon L^p(M,E) \to L^p(M,E)$$

est R-borné.

Algèbres *QWEP*

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).

Algèbres *QWEP*

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP si M admet un plongement

$$\pi \colon M \to B(H)^{\mathcal{U}}$$

dans une ultrapuissance $B(H)^{\mathcal{U}}$ de $B(H)$ où

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP si M admet un plongement

$$\pi\colon M \to B(H)^{\mathcal{U}}$$

dans une ultrapuissance $B(H)^{\mathcal{U}}$ de $B(H)$ où

- *H est un espace de Hilbert*

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP si M admet un plongement

$$\pi\colon M \to B(H)^{\mathcal{U}}$$

dans une ultrapuissance $B(H)^{\mathcal{U}}$ de $B(H)$ où

- *H est un espace de Hilbert*
- *$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre libre*

Algèbres *QWEP*

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP si M admet un plongement

$$\pi\colon M \to B(H)^{\mathcal{U}}$$

dans une ultrapuissance $B(H)^{\mathcal{U}}$ de $B(H)$ où

- *H est un espace de Hilbert*
- *$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre libre*
- *tel qu'il existe une espérance conditionnelle normale*

$$\mathbb{E}\colon B(H)^{\mathcal{U}} \to \pi(M).$$

Définition

Soit M une algèbre de VN (finie).
On dit M est QWEP si M admet un plongement

$$\pi\colon M \to B(H)^{\mathcal{U}}$$

dans une ultrapuissance $B(H)^{\mathcal{U}}$ de $B(H)$ où

- *H est un espace de Hilbert*
- *$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre libre*
- *tel qu'il existe une espérance conditionnelle normale*

$$\mathbb{E}\colon B(H)^{\mathcal{U}} \to \pi(M).$$

(Connes) Toute algèbre de von Neumann est-elle QWEP ?

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans un Banach est une martingale si

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans un Banach est une martingale si

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k} \otimes Id_E)(x_{k+1}) = x_k, \qquad k \geq 1.$$

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans un Banach est une martingale si

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k} \otimes Id_E)(x_{k+1}) = x_k, \qquad k \geq 1.$$

- La suite $(d_k)_{k\geq 1}$ défini par $d_k = x_k - x_{k-1}$ est la suite des différences de (x_k).

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans un Banach est une martingale si

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k} \otimes Id_E)(x_{k+1}) = x_k, \qquad k \geq 1.$$

- La suite $(d_k)_{k\geq 1}$ défini par $d_k = x_k - x_{k-1}$ est la suite des différences de (x_k).

- Une filtration d'une AVN M est une suite croissante $(M_k)_{k\geq 1}$ de sous-algèbres de M telles que $\cup_{k\geq 1} M_k$ soit w^*-dense dans M.

Martingales

- Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une filtration d'un espace probabilisé Ω.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans un Banach est une martingale si

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k} \otimes Id_E)(x_{k+1}) = x_k, \qquad k \geq 1.$$

- La suite $(d_k)_{k\geq 1}$ défini par $d_k = x_k - x_{k-1}$ est la suite des différences de (x_k).

- Une filtration d'une AVN M est une suite croissante $(M_k)_{k\geq 1}$ de sous-algèbres de M telles que $\cup_{k\geq 1} M_k$ soit w^*-dense dans M.
- Une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ de $L^p(M, E)$ est une martingale si la même relation est vérifiée.

Définition

Soit X un Banach.

UMD

Définition

Soit X un Banach.
On dit que X est UMD

UMD

Définition

Soit X un Banach.
On dit que X est UMD s'il existe $K \geq 0$ telle que pour un (tout) $1 < p < \infty$ et

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*

UMD

Définition

Soit X un Banach.
On dit que X est UMD s'il existe $K \geq 0$ telle que pour un (tout) $1 < p < \infty$ et

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*
- *toute suite de différences de martingales $(dx_k)_{k=1}^n \subset L^p(\Omega, X)$*

UMD

Définition

Soit X un Banach.
On dit que X est UMD s'il existe $K \geq 0$ telle que pour un (tout) $1 < p < \infty$ et

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*
- *toute suite de différences de martingales $(dx_k)_{k=1}^n \subset L^p(\Omega, X)$*

on ait

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k dx_k \right\|_{L^p(\Omega,X)} \leq K \left\| \sum_{k=1}^n dx_k \right\|_{L^p(\Omega,X)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Définition

Soit E un espace d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$.

$OUMD'_p$

Définition

Soit E un espace d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$.
On dit que E est $OUMD'_p$ s'il existe $K \geq 0$ telle que pour

$OUMD'_p$

Définition

Soit E *un espace d'opérateurs. Supposons* $1 < p < \infty$.
On dit que E *est* $OUMD'_p$ *s'il existe* $K \geq 0$ *telle que pour*

- *tout choix de signes* $\theta_k = \pm 1$,

$OUMD'_p$

Définition

Soit E un espace d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$.
On dit que E est $OUMD'_p$ s'il existe $K \geq 0$ telle que pour

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*
- *toute suite de différences de martingale $(dx_k)_{k=1}^n \subset L^p(M, E)$ relative à une filtration $(M_k)_{k\geq 1}$ d'une AVN M avec QWEP*

$OUMD'_p$

Définition

Soit E un espace d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$.
On dit que E est $OUMD'_p$ s'il existe $K \geq 0$ telle que pour

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*
- *toute suite de différences de martingale $(dx_k)_{k=1}^n \subset L^p(M, E)$ relative à une filtration $(M_k)_{k \geq 1}$ d'une AVN M avec QWEP*

on ait

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k dx_k \right\|_{L^p(M,E)} \leq K \left\| \sum_{k=1}^n dx_k \right\|_{L^p(M,E)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$OUMD'_p$

Définition

Soit E un espace d'opérateurs. Supposons $1 < p < \infty$.
On dit que E est $OUMD'_p$ s'il existe $K \geq 0$ telle que pour

- *tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$,*
- *toute suite de différences de martingale $(dx_k)_{k=1}^n \subset L^p(M, E)$ relative à une filtration $(M_k)_{k \geq 1}$ d'une AVN M avec QWEP*

on ait

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k dx_k \right\|_{L^p(M,E)} \leq K \left\| \sum_{k=1}^n dx_k \right\|_{L^p(M,E)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- Question : est-ce que $OUMD'_p$ dépend de p ?

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T : M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T: M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T: M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

- *où $k \in \mathbb{N}$ et N est une AVN munie d'une trace,*

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T\colon M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

- *où $k \in \mathbb{N}$ et N est une AVN munie d'une trace,*
- *$J\colon M \to N$ est une $*$-représentation fidèle préservant les traces,*

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T\colon M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

- *où $k \in \mathbb{N}$ et N est une AVN munie d'une trace,*
- *$J\colon M \to N$ est une $*$-représentation fidèle préservant les traces,*
- *$\mathbb{E}\colon N \to M$ est l'espérance conditionnelle associé à J,*

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T\colon M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

- *où $k \in \mathbb{N}$ et N est une AVN munie d'une trace,*
- *$J\colon M \to N$ est une $*$-représentation fidèle préservant les traces,*
- *$\mathbb{E}\colon N \to M$ est l'espérance conditionnelle associé à J,*
- *$N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ est une suite décroissante de sous-algèbres de N associées à des espérances conditionnelles $\mathbb{E}_k$.*

Dilatation de Rota

Définition

Soit M une AVN munie d'une trace. Un opérateur $T\colon M \to M$ vérifie la propriété de Rota s'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T^k"] \arrow[d, "J"'] & M \\ N \arrow[r, "\mathbb{E}_k"] & N \arrow[u, "\mathbb{E}"'] \end{tikzcd}$$

- *où $k \in \mathbb{N}$ et N est une AVN munie d'une trace,*
- *$J\colon M \to N$ est une $*$-représentation fidèle préservant les traces,*
- *$\mathbb{E}\colon N \to M$ est l'espérance conditionnelle associé à J,*
- *$N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ est une suite décroissante de sous-algèbres de N associées à des espérances conditionnelles $\mathbb{E}_k$.*

On peut montrer que chaque T_t en admet une avec N QWEP.

Interpolation et R-analyticité

Théorème (Arendt, Bu, Fackler...)

Soient $(T_{1,t})$ *et* $(T_{2,t})$ *deux* C_0*-semigroupes sur* X_1 *et* X_2

Théorème (Arendt, Bu, Fackler...)

Soient $(T_{1,t})$ *et* $(T_{2,t})$ *deux* C_0*-semigroupes sur* X_1 *et* X_2 *tels que* (X_1, X_2) *soit un couple d'interpolation d'espaces* K*-convexes.*

Théorème (Arendt, Bu, Fackler...)

Soient $(T_{1,t})$ et $(T_{2,t})$ deux C_0-semigroupes sur X_1 et X_2 tels que (X_1, X_2) soit un couple d'interpolation d'espaces K-convexes. Supposons que $(T_{1,t})$ soit R-analytique et que

$$R(\{T_{2,t} : 0 < t < 1\}) < \infty$$

Interpolation et R-analyticité

Théorème (Arendt, Bu, Fackler...)

Soient $(T_{1,t})$ et $(T_{2,t})$ deux C_0-semigroupes sur X_1 et X_2 tels que (X_1, X_2) soit un couple d'interpolation d'espaces K-convexes. Supposons que $(T_{1,t})$ soit R-analytique et que

$$R(\{T_{2,t} : 0 < t < 1\}) < \infty$$

Alors le semigroupe (T_t) obtenu par interpolation défini sur

$$(X_1, X_2)_\alpha$$

est R-analytique pour tout $0 < \alpha < 1$.

Preuve de la R-analyticité

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur

$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur
$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$

Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur
$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$
Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur

$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$

  Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
  Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.
- Chaque T_t admet une dilatation de Rota sur une algèbre QWEP :

$$T_t^k = \mathbb{E}\mathbb{E}_k J, \qquad k \geq 1.$$

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur
$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$
Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.
- Chaque T_t admet une dilatation de Rota sur une algèbre QWEP :
$$T_t^k = \mathbb{E}\mathbb{E}_k J, \qquad k \geq 1.$$
Notons que OH est $OUMD'_q$.

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur
$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$
Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.
- Chaque T_t admet une dilatation de Rota sur une algèbre QWEP :
$$T_t^k = \mathbb{E}\mathbb{E}_k J, \qquad k \geq 1.$$
Notons que OH est $OUMD'_q$.
On déduit que $\{T_t \otimes Id_{OH} \;:\; t \geq 0\}$ est R-borné sur
$L^q(\mathcal{L}F_n, OH)$.

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur

$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$

  Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
  Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.

- Chaque T_t admet une dilatation de Rota sur une algèbre QWEP :

$$T_t^k = \mathbb{E}\mathbb{E}_k J, \qquad k \geq 1.$$

  Notons que OH est $OUMD'_q$.
  On déduit que $\{T_t \otimes Id_{OH} \;:\; t \geq 0\}$ est R-borné sur $L^q(\mathcal{L}F_n, OH)$.

- Or

$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH) = \Big(L^2(\mathcal{L}F_n, OH), L^q(\mathcal{L}F_n, OH)\Big)_{\alpha}.$$

Preuve de la R-analyticité

- Le semigroupe $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est analytique sur
$$L^2(\mathcal{L}F_n, OH).$$
Sur un Hilbert, tout ensemble borné est R-borné.
Donc $(T_t \otimes Id_{OH})_{t \geq 0}$ est R-analytique sur cet espace.
- Chaque T_t admet une dilatation de Rota sur une algèbre QWEP :
$$T_t^k = \mathbb{E}\mathbb{E}_k J, \qquad k \geq 1.$$
Notons que OH est $OUMD'_q$.
On déduit que $\{T_t \otimes Id_{OH} \ : \ t \geq 0\}$ est R-borné sur $L^q(\mathcal{L}F_n, OH)$.
- Or
$$L^p(\mathcal{L}F_n, OH) = \Big(L^2(\mathcal{L}F_n, OH), L^q(\mathcal{L}F_n, OH)\Big)_\alpha.$$
On conclut par interpolation.

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X.

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X. Supposons que

- *A admette un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_{\theta_0})$ borné pour un $0 < \theta_0 < \pi$.*

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X. Supposons que

- *A admette un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_{\theta_0})$ borné pour un $0 < \theta_0 < \pi$.*
- *(T_t) soit R-analytique.*

R-analyticité et calcul fonctionnel

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X. Supposons que

- *A admette un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_{\theta_0})$ borné pour un $0 < \theta_0 < \pi$.*
- *(T_t) soit R-analytique.*

Alors A admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\theta)$ borné pour un $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

R-analyticité et calcul fonctionnel

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X. Supposons que

- *A admette un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_{\theta_0})$ borné pour un $0 < \theta_0 < \pi$.*
- *(T_t) soit R-analytique.*

Alors A admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\theta)$ borné pour un $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Des techniques de dilatation d'opérateurs permettent d'obtenir le calcul fonctionnel pour un angle $0 < \theta_0 < \pi$.

La présence de R-bornitude permet de réduire l'angle :

Proposition (Kalton, Weiss, 2001)

Soit (T_t) un C_0-semigroupe de générateur $-A$ sur un espace X. Supposons que

- *A admette un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_{\theta_0})$ borné pour un $0 < \theta_0 < \pi$.*
- *(T_t) soit R-analytique.*

Alors A admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\theta)$ borné pour un $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Des techniques de dilatation d'opérateurs permettent d'obtenir le calcul fonctionnel pour un angle $0 < \theta_0 < \pi$.