Espaces de séries de Dirichlet et opérateurs de composition

Maxime Bailleul – Université d'Artois – LML

Journées du GDR AFHP

Mardi 22 Octobre 2013
Lyon

Plan

Plan

1. Notations.

Plan

1. Notations.
2. Séries de Dirichlet.

Plan

1. Notations.
2. Séries de Dirichlet.
3. Espaces de Hardy et de Bergman de séries de Dirichlet.

Plan

1. Notations.
2. Séries de Dirichlet.
3. Espaces de Hardy et de Bergman de séries de Dirichlet.
4. Opérateurs de composition.

Notations

Notations

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\theta := \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \theta\}$.

Notations

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\theta := \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > \theta\}$.
- Soit $n \geq 2$

Notations

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\theta := \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > \theta\}$.

- Soit $n \geq 2$, $p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}$ sera sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Notations

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\theta := \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > \theta\}$.
- Soit $n \geq 2$, $p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k}$ sera sa décomposition en produit de facteurs premiers.
- $\mathbb{T}^\infty = \{z = (z_1, z_2, \cdots), |z_i| = 1, \forall i \geq 1\}$.

Séries de Dirichlet

Séries de Dirichlet

On considère les séries de Dirichlet de la forme :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \quad \text{où } s \in \mathbb{C}.$$

Séries de Dirichlet

On considère les séries de Dirichlet de la forme :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \quad \text{où } s \in \mathbb{C}.$$

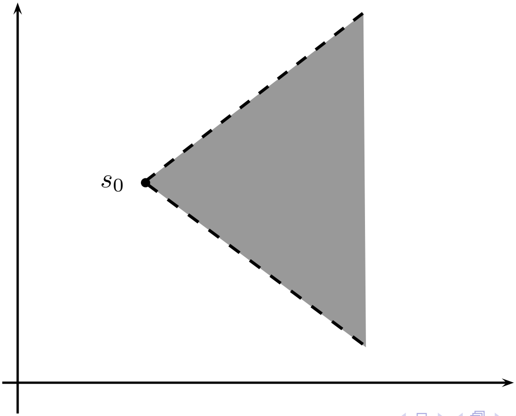
Si f converge en $s = s_0$

Séries de Dirichlet

On considère les séries de Dirichlet de la forme :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \quad \text{où } s \in \mathbb{C}.$$

Si f converge en $s = s_0$, alors f converge uniformément sur tout ensemble de la forme suivante :



Séries de Dirichlet

Définition

$$\sigma_c(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \textit{ est convergente sur } \mathbb{C}_a\}.$$

Séries de Dirichlet

Définition

$$\sigma_c(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \textit{ est convergente sur } \mathbb{C}_a\}.$$

DIVERGENCE | CONVERGENCE

$$\Re(s) = \sigma_c(f)$$

Séries de Dirichlet

Définitions

$$\sigma_a(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \ \textit{converge absolument sur}\ \mathbb{C}_a\}.$$

Séries de Dirichlet

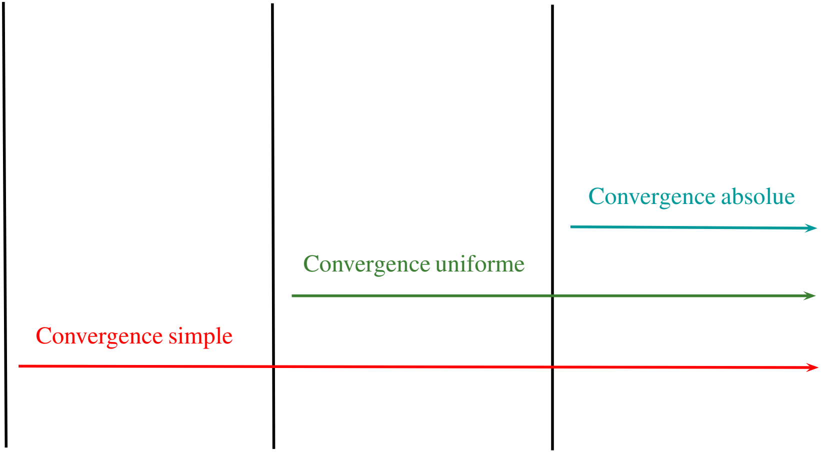
Définitions

$$\sigma_a(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \text{ converge } \textit{absolument} \text{ sur } \mathbb{C}_a\}.$$
$$\sigma_u(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \text{ converge } \textit{uniformément} \text{ sur } \mathbb{C}_a\}.$$

Séries de Dirichlet

Définitions

$$\sigma_a(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \text{ converge \textcolor{red}{absolument} sur } \mathbb{C}_a\}.$$
$$\sigma_u(f) = \inf\{a \in \mathbb{R},\ f \text{ converge \textcolor{red}{uniformément} sur } \mathbb{C}_a\}.$$



Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$$

Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k})^{-s}$$

Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k})^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \cdots (p_k^{-s})^{\alpha_k}.$$

Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k})^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \cdot\cdot (p_k^{-s})^{\alpha_k}.$$

On définit alors $D(f)$ sur $\mathbb{T}^\infty$ par :

Séries de Dirichlet

Point de vue de Bohr : Une série de Dirichlet peut être vue comme une série de Fourier à une infinité de variables.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot p_k^{\alpha_k})^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \cdot\cdot (p_k^{-s})^{\alpha_k}.$$

On définit alors $D(f)$ sur $\mathbb{T}^\infty$ par :

$$D(f)(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_1^{\alpha_1} \cdot\cdot z_k^{\alpha_k} \quad \forall z \in \mathbb{T}^\infty.$$

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$.

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ *est le sous-espace de* $L^p(\mathbb{T}^\infty)$

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot \cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot \cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Définition (Bayart)

L'espace $\mathcal{H}^p$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot \cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Définition (Bayart)

L'espace $\mathcal{H}^p$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Pour $p = 2$,

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot\cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Définition (Bayart)

L'espace $\mathcal{H}^p$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Pour $p = 2$,

$$\left\| \sum_{n=p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, p_k^{\alpha_k}} a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}^2}^2$$

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot \cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Définition (Bayart)

L'espace $\mathcal{H}^p$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Pour $p = 2$,

$$\left\| \sum_{n=p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, p_k^{\alpha_k}} a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \left\| \sum_{n \geq 1} a_n z_1^{\alpha_1} \cdot \cdot z_k^{\alpha_k} \right\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)}^2$$

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

On munit $\mathbb{T}^\infty$ de sa mesure de Haar.

Définition

Soit $p \geq 1$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est le sous-espace de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ engendré par les polynômes analytiques $z_1^{\alpha_1} \cdot\cdot z_k^{\alpha_k}$ où $k \geq 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$.

Définition (Bayart)

L'espace $\mathcal{H}^p$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$.

Pour $p = 2$,

$$\left\| \sum_{n=p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot\, p_k^{\alpha_k}} a_n n^{-s} \right\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \left\| \sum_{n \geq 1} a_n z_1^{\alpha_1} \cdot\cdot z_k^{\alpha_k} \right\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel :
$$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})}\, 2rdr\right)^{1/p}.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel : $$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})}\, 2rdr\right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel :
$$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})}\, 2rdr\right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Définition

Soit $p \geq 1$ et P un polynome de Dirichlet.

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel :
$$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \, 2rdr\right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Définition

Soit $p \geq 1$ et P un polynome de Dirichlet. On pose :

$$\|P\|_{\mathcal{A}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}(2\exp(-2\sigma))d\sigma\right)^{1/p}.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel : $$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})} 2rdr\right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Définition

Soit $p \geq 1$ et P un polynome de Dirichlet. On pose :

$$\|P\|_{\mathcal{A}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}(2\exp(-2\sigma))d\sigma\right)^{1/p}.$$

$\mathcal{A}^p$ est alors le complété de l'ensemble des polynômes de Dirichlet pour cette norme.

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel : $$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})}\, 2rdr\right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Définition

Soit $p \geq 1$ et P un polynome de Dirichlet. On pose :

$$\|P\|_{\mathcal{A}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}(2\exp(-2\sigma))d\sigma\right)^{1/p}.$$

$\mathcal{A}^p$ est alors le complété de l'ensemble des polynômes de Dirichlet pour cette norme.

Pour $p = 2$,

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Rappel :
$$\|g\|_{A^p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|g_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})} 2rdr \right)^{1/p}.$$

Pour une série de Dirichlet f et $\sigma > 0$, $f_\sigma(s) := f(\sigma + s)$.

Définition

Soit $p \geq 1$ et P un polynome de Dirichlet. On pose :
$$\|P\|_{\mathcal{A}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} (2\exp(-2\sigma)) d\sigma \right)^{1/p}.$$
$\mathcal{A}^p$ est alors le complété de l'ensemble des polynômes de Dirichlet pour cette norme.

Pour $p = 2$,
$$\|P\|_{\mathcal{A}^2} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^2}{(\log(n) + 1)} \right)^{1/2}.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$.

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$*. Pour tout* $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$ et :

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{H}^p)^*} = \zeta(2\Re(s))^{1/p} \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$*. Pour tout* $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$ *et :*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{H}^p)^*} = \zeta(2\Re(s))^{1/p} \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p \geq 1$*.*

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$*. Pour tout* $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$ *et :*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{H}^p)^*} = \zeta(2\Re(s))^{1/p} \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p \geq 1$*. Pour tout* $f \in \mathcal{A}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (Bayart 2002)

Soit $p \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{H}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$ et :

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{H}^p)^*} = \zeta(2\Re(s))^{1/p} \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p \geq 1$. Pour tout $f \in \mathcal{A}^p$, $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$ et il existe une constante $c_p > 0$ telle que :

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p)^*} \leq c_p \left(\frac{\Re(s)}{2\Re(s) - 1} \right)^{2/p} \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}.$$

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p > 2$. L'injection "naturelle" de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée.

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p > 2$. L'injection "naturelle" de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée.

Idée :

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p > 2$. L'injection "naturelle" de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée.

Idée :

On suppose l'injection bornée

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p > 2$. L'injection "naturelle" de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée.

Idée :

On suppose l'injection bornée et on utilise la proposition suivante :

Espaces de Bergman $\mathcal{A}^p$

Théorème (B, Lefèvre)

Soit $p > 2$. L'injection "naturelle" de $\mathcal{H}^2$ dans $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée.

Idée :
On suppose l'injection bornée et on utilise la proposition suivante :

Proposition (B, Lefèvre)

Soit $m \geq 1$. Il existe $c_m > 0$ telle que

$$\|\zeta^m(\sigma + \cdot)\|^2_{\mathcal{H}^2} \sim \frac{c_m}{(2\sigma - 1)^{m^2}} \quad \sigma \to 1/2.$$

Opérateurs de composition

Opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$ sont analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1/2\}$.

Opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$ sont analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1/2\}$.

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique.

Opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$ sont analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1/2\}$.

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique. On pose :

$$C_\Phi(f) := f \circ \Phi.$$

Opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$ sont analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1/2\}$.

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ *une fonction analytique. On pose :*

$$C_\Phi(f) := f \circ \Phi.$$

Question : Quand $C_\Phi : \mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p$ est-il borné ?

Opérateurs de composition

Les fonctions de $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$ sont analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1/2\}$.

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique. On pose :

$$C_\Phi(f) := f \circ \Phi.$$

Question : Quand $C_\Phi : \mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^p$ est-il borné ? et sur $\mathcal{A}^p$?

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

2) $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

2) $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$ *et* $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$.

Opérateurs de composition

Théorème (Gordon et Hedenmalm 1999, Bayart 2002, Queffélec et Seip 2013)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné* C_Φ *de* $\mathcal{H}^p$ *sur* $\mathcal{H}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

2) $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$ *et* $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$.

La réciproque est vraie quand $c_0 \geq 1$ *et quand* $c_0 = 0$ *et* $p \in 2\mathbb{N}^*$.

Opérateurs de composition

Théorème (B)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné)* C_Φ *de* $\mathcal{A}^p$ *sur* $\mathcal{A}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$.

2) $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$ *et* $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$.

La réciproque est vraie quand $c_0 \geq 1$.

Opérateurs de composition

Théorème (B)

Si une fonction holomorphe $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *définit un opérateur de composition borné)* C_Φ *de* $\mathcal{A}^p$ *sur* $\mathcal{A}^p$ *alors*

1) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* $c_0 \in \mathbb{N}$ *et* φ *est une série de Dirichlet qui converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\epsilon$ *pour tout* $\epsilon > 0$*.*

2) $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$ *et* $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ *si* $c_0 = 0$*.*

La réciproque est vraie quand $c_0 \geq 1$*. Si* $c_0 = 0$ *et* $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_{1/2+\eta}$ *avec* $\eta > 0$ *alors la réciproque est encore vraie.*

Opérateurs de composition

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ *une fonction analytique.*

Opérateurs de composition

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ *une fonction analytique. On pose*

$$N_\Phi(s) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a) = s}} \Re(a) \qquad \forall s \in \mathbb{C}_+.$$

Opérateurs de composition

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ une fonction analytique. On pose

$$N_\Phi(s) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(a) \qquad \forall s \in \mathbb{C}_+.$$

On considère Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ ou $c_0 \geq 1$ et φ est une série de Dirichlet qui converge sur $\mathbb{C}_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ telle que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

Opérateurs de composition

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ *une fonction analytique. On pose*

$$N_\Phi(s) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(a) \qquad \forall s \in \mathbb{C}_+.$$

On considère Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ ou $c_0 \geq 1$ et φ est une série de Dirichlet qui converge sur $\mathbb{C}_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ telle que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

Théorème (M.B)

Si $Im(\varphi)$ *est borné, on a :*

$$\| C_\Phi \|_{e,\mathcal{H}^2} \lesssim \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{N_\phi(s)}{\Re(s)}.$$

Opérateurs de composition

Définition

Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ *une fonction analytique. On pose*

$$N_{\Phi,2}(s) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(a)^2 \quad \forall s \in \mathbb{C}_+.$$

On considère Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ ou $c_0 \geq 1$ et φ est une série de Dirichlet qui converge sur $\mathbb{C}_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ telle que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

Théorème (B)

Si $Im(\varphi)$ *est borné, on a :*

$$\|C_\Phi\|_{e,\mathcal{A}^2} \lesssim \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{N_{\phi,2}(s)}{\Re(s)^2}.$$

Opérateurs de composition

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Opérateurs de composition

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $\Phi^*(it) = \lim_{\sigma\to 0} \Phi(\sigma + it)$ existe λ-pp.

Opérateurs de composition

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $\Phi^*(it) = \lim_{\sigma \to 0} \Phi(\sigma + it)$ existe λ-pp.

Définition

Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

Opérateurs de composition

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $\Phi^*(it) = \lim_{\sigma \to 0} \Phi(\sigma + it)$ existe λ-pp.

Définition

Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose :

$$H(t, h) = \{s \in \mathbb{C}_+,\ |s - it| < h\}.$$

Opérateurs de composition

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $\Phi^*(it) = \lim_{\sigma \to 0} \Phi(\sigma + it)$ existe λ-pp.

Définition

Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose :

$$H(t, h) = \{s \in \mathbb{C}_+, \ |s - it| < h\}.$$

Définitions

$$\lambda_\Phi(A) = \lambda(\{t \in \mathbb{R}, \ \Phi^*(it) \in A\}) \quad \textit{pour tout ouvert } A \subset \mathbb{C}_+.$$

$$\rho_\Phi(h) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda_\Phi(H(t, h)) \quad \forall h > 0.$$

Opérateurs de composition

Théorème (M.B)

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Opérateurs de composition

Théorème (M.B)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $h > 0$ assez petit, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que :

$$\sup_{s \in H(t, c_1 h)} N_\Phi(s) \leq \lambda_\Phi(H(t, c_2 h)).$$

Opérateurs de composition

Théorème (M.B)

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $h > 0$ assez petit, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que :

$$\sup_{s \in H(t, c_1 h)} N_\Phi(s) \leq \lambda_\Phi(H(t, c_2 h)).$$

En particulier si $Im(\varphi)$ est borné, on obtient :

$$\|C_\Phi\|_{e,\mathcal{H}^2} \lesssim \limsup_{h \to 0} \frac{\rho_\Phi(h)}{h}.$$