Sur l'espace Lipschitz-libre des compacts dénombrables

Aude Dalet

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Lundi 21 *octobre* 2013

Définitions

(M, d) un espace métrique pointé. Alors $(Lip_0(M), \|\|_L)$ est un espace de Banach.

Sa boule unité fermé étant compact pour la topologie de la convergence simple, c'est un espace dual.

Définitions

(M, d) un espace métrique pointé. Alors $(Lip_0(M), \| \|_L)$ est un espace de Banach.

Sa boule unité fermé étant compact pour la topologie de la convergence simple, c'est un espace dual.

Définition

L'espace Lipschitz-libre sur M, noté $\mathcal{F}(M)$, est l'unique prédual de $Lip_0(M)$ qui induit la topologie de la convergence simple .

$\mathcal{F}(M)$ est le sous espace de $Lip_0(M)^*$ engendré par les δ_x, $x \in M$, où $\delta_x(f) = f(x)$

Propriété d'approximation bornée

Soit X un espace de Banach,

- X a la propriété d'approximation (AP) si $\forall K \subset X$ compact, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $T : X \to X$ de rang fini tel que $\forall x \in K$, $\|Tx - x\| < \varepsilon$
- X a la λ-propriété d'approximation bornée (λ-BAP), $\lambda \geqslant 1$, si $\forall K \subset X$ compact, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $T : X \to X$ de rang fini tel que $\forall x \in K$, $\|Tx - x\| < \varepsilon$ et $\|T\| \leqslant \lambda$
- X a la propriété d'approximation métrique (MAP) s'il a la 1-BAP

Godefroy, Kalton (2003) :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ à la MAP
- X Banach, X à la λ-BAP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(X)$ à la λ-BAP

Godefroy, Kalton (2003) : • $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ à la MAP

• X Banach, X à la λ-BAP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(X)$ à la λ-BAP

Cependant

Godefroy, Ozawa : $\exists$ K compact métrique tel que $\mathcal{F}(K)$ n'ai pas AP

Godefroy, Kalton (2003) : • $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ à la MAP
• X Banach, X à la λ-BAP $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(X)$ à la λ-BAP

Cependant

Godefroy, Ozawa : $\exists$ K compact métrique tel que $\mathcal{F}(K)$ n'ai pas AP

Question

A-t-on K espace métrique compact dénombrable $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(K)$ a la BAP ?

Décomposition de Kalton

Décomposition de l'espace en anneaux centrés en 0

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ M_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) \leqslant 2^k\}\ ,\ O_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) < 2^k\}$$

$$a_k = M_{k+1} \backslash O_{k-1} \cup \{0\} \ \text{ et } \ A_k = M_{k+1} \backslash O_{-k-1} \cup \{0\}$$

Décomposition de Kalton

Décomposition de l'espace en anneaux centrés en 0

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ M_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) \leqslant 2^k\}\ ,\ O_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) < 2^k\}$$
$$a_k = M_{k+1} \backslash O_{k-1} \cup \{0\} \ \text{ et } \ A_k = M_{k+1} \backslash O_{-k-1} \cup \{0\}$$

Construction d'une suite d'opérateurs $T_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(a_k) \subset \mathcal{F}(M)$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad T_k\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \in M_{k-1} \\ (\log_2 d(0,x) - (k-1))\,\delta(x) & , x \in M_k \backslash M_{k-1} \\ (k+1-\log_2 d(0,x))\,\delta(x) & , x \in M_{k+1} \backslash M_k \\ 0 & , x \notin M_{k+1} \end{cases}$$

Décomposition de Kalton

Décomposition de l'espace en anneaux centrés en 0

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ M_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) \leqslant 2^k\}\ ,\ O_k = \{x \in M \mid \mathrm{d}(0,x) < 2^k\}$$
$$a_k = M_{k+1} \backslash O_{k-1} \cup \{0\} \ \text{ et } \ A_k = M_{k+1} \backslash O_{-k-1} \cup \{0\}$$

Construction d'une suite d'opérateurs $T_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(a_k) \subset \mathcal{F}(M)$

Théorème [Kalton, 2004]

$\forall \gamma \in \mathcal{F}(M), \gamma = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k\gamma$ *inconditionnellement et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_k\gamma\| \leqslant 72\|\gamma\|$

Conséquences

0 *est l'unique point d'accumulation de M* ($M' = \{0\}$)

Conséquences

0 est l'unique point d'accumulation de M ($M' = \{0\}$)

Alors la suite d'opérateur $S_K = \sum_{k=-K}^{K} T_k$ vérifie :

- $\forall \gamma \in \mathcal{F}(M), \lim_{K \to +\infty} S_K(\gamma) = \gamma$ *toujours vrai*
- $\forall K \in \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(S_K) \subset \mathcal{F}(A_K)$ de dimension finie car 0 est l'unique point d'accumulation
- $\forall K \in \mathbb{Z}, \|S_K\| \leqslant 72$ *toujours vrai*

C'est-à-dire que $\mathcal{F}(M)$ *a la 72-BAP.*

Conséquences

Si $M' = \{0\}$, *alors* $\mathcal{F}(M)$ *a la* 72*-BAP*

Si $M' = \{a_1, \ldots, a_N\}$, *alors* $\mathcal{F}(M)$ *a la BAP*

Conséquences

Si $M' = \{0\}$, alors $\mathcal{F}(M)$ a la 72-BAP

Si $M' = \{a_1, \ldots, a_N\}$, alors $\mathcal{F}(M)$ a la BAP

En effet,

- $\mathcal{F}(M) = \left(\oplus_{i=1}^{N} \mathcal{F}(F_i)\right)_1$ avec $F_i' = \{a_i\}$ et donc chaque $\mathcal{F}(F_i)$ a la 72-BAP
- la BAP est stable par $\oplus_1$ finie et par isomorphisme

Conséquences

Si $M' = \{0\}$*, alors* $\mathcal{F}(M)$ *a la 72-BAP*

Si $M' = \{a_1, \ldots, a_N\}$*, alors* $\mathcal{F}(M)$ *a la BAP*

Question

A-t-on $M^{(2)} = \{0\}$ *ou* $M^{(2)}$ *fini* $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ *a la BAP* **?**

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

Idée : *Réutiliser la décomposition*

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

Idée : *Réutiliser la décomposition*

On considère les anneaux $A_k = M_{k+1} \backslash O_{-k-1} \cup \{0\}$

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

Idée : *Réutiliser la décomposition*

M est découper en anneaux $A_k = M_{k+1} \backslash O_{-k-1}$

$M^{(2)} = \{0\}$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A'_k est fini

$$\Rightarrow \mathcal{F}(A_k) \text{ a la } C_k\text{-BAP}$$

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

$\mathcal{F}(A_k)$ a la C_k-BAP

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists L_j^k : \mathcal{F}(A_k) \to \mathcal{F}(A_k)$ opérateurs de rang fini t.q.

- $\forall \gamma \in \mathcal{F}(A_k)$, $\lim_j L_j^k \gamma = \gamma$
- $\forall j$, $\|L_j^k\| \leqslant C_k$

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

$\mathcal{F}(A_k)$ a la C_k-BAP

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists L_j^k : \mathcal{F}(A_k) \to \mathcal{F}(A_k)$ opérateurs de rang fini t.q.

- $\forall \gamma \in \mathcal{F}(A_k)$, $\lim_j L_j^k \gamma = \gamma$
- $\forall j$, $\|L_j^k\| \leqslant C_k$

Décomposition de Kalton

$S_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(A_k)$ t.q.

- $\forall \mu \in \mathcal{F}(M)$, $\lim_k S_k \mu = \mu$
- $\forall k$, $\|S_k\| \leqslant 72$

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

$\mathcal{F}(A_k)$ a la C_k-BAP

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists L_j^k : \mathcal{F}(A_k) \to \mathcal{F}(A_k)$ opérateurs de rang fini t.q.

- $\forall \gamma \in \mathcal{F}(A_k)$, $\lim\limits_j L_j^k \gamma = \gamma$
- $\forall j$, $\|L_j^k\| \leqslant C_k$

Décomposition de Kalton

$S_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(A_k)$ t.q.

- $\forall \mu \in \mathcal{F}(M)$, $\lim\limits_k S_k \mu = \mu$
- $\forall k$, $\|S_k\| \leqslant 72$

On obtient alors une suite d'opérateurs $R_{j,k} = L_j^k \circ S_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ de rang fini t.q.

- $\forall \mu \in \mathcal{F}(M)$, $\lim\limits_{j,k} R_{j,k} \mu = \mu$
- $\forall k, j$, $\|R_{k,j}\| \leqslant 72 C_k$

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

On obtient alors une suite d'opérateur $R_{j,k} = L_j^k \circ S_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ de rang fini t.q.

- $\forall \mu \in \mathcal{F}(M), \lim\limits_{j,k} R_{j,k}\mu = \mu$
- $\forall k, j, \|R_{k,j}\| \leqslant 72 C_k$

Problème

La norme est bornée par une constante qui dépend de k...

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

On obtient alors une suite d'opérateur $R_{j,k} = L_j^k \circ S_k : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ *de rang fini t.q.*

- $\forall \mu \in \mathcal{F}(M), \lim\limits_{j,k} R_{j,k}\mu = \mu$
- $\forall k, j, \|R_{k,j}\| \leqslant 72C_k$

Problème

La norme est bornée par une constante qui dépend de k...

Question

Existe-t-il une constante C *universelle telle que* M' *fini* $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ *a la* C*-BAP ?*

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

Question

Existe-t-il une constante C universelle telle que M' fini $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la C-BAP **?**

Théorème [Grothendieck]

Soit X un Banach séparable isométrique à un espace dual.
Si X a AP, alors X a MAP.

$M^{(2)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la BAP ?

Question

Existe-t-il une constante C universelle telle que M' fini $\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ a la C-BAP **?**

Théorème [Grothendieck]

Soit X un Banach séparable isométrique à un espace dual.
Si X a AP, alors X a MAP.

But

Montrer que pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ est un espace dual.

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

M espace métrique pointé

Définition de $lip_0(M)$

$f \in lip_0(M) \subset Lip_0(M)$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \mathrm{d}(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \mathrm{d}(x,y)$$

Lemme

Pour M compact, les éléments de $lip_0(M)$ atteignent leur norme ($lip_0(M) \subset \mathrm{NA}(\mathcal{F}(M))$)

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème [Petunin-Plichko]

- X Banach séparable
- $S \subset X^*$ fermé, $S \subset \mathrm{NA}(X)$
- S séparant

Alors $S^* \equiv X$

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

M compact métrique pointé

Théorème [Petunin-Plichko]

- X Banach séparable
- $S \subset X^*$ fermé, $S \subset \mathrm{NA}(X)$
- S séparant

Alors $S^* \equiv X$

Espace Lipschitz-libre

- $\mathcal{F}(M)$ Banach séparable pour M dénombrable
- $lip_0(M) \subset \mathcal{F}(M)^*$ fermé, $lip_0(M) \subset \mathrm{NA}(X)$
- $lip_0(M)$ séparant ?

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

M compact métrique pointé

Théorème [Petunin-Plichko]

- X Banach séparable
- $S \subset X^*$ fermé, $S \subset \mathrm{NA}(X)$
- S séparant

Alors $S^* \equiv X$

Espace Lipschitz-libre

- $\mathcal{F}(M)$ Banach séparable pour M dénombrable
- $lip_0(M) \subset \mathcal{F}(M)^*$ fermé, $lip_0(M) \subset \mathrm{NA}(X)$
- $lip_0(M)$ séparant ?

Conséquence

Lorsque $lip_0(M)$ est séparant, $\mathcal{F}(M)$ est le dual de $lip_0(M)$

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathrm{lip}_0(K)$ sépare uniformément les points de K

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K

Définition

$lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K si

$$\exists c \geqslant 1 : \forall x, y \in K,\ \exists h = h_{x,y} \in lip_0(K),$$
$$\|h\|_L \leqslant c \text{ et } |h(x) - h(y)| = \mathrm{d}(x, y)$$

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K ($\Leftrightarrow$ séparant).

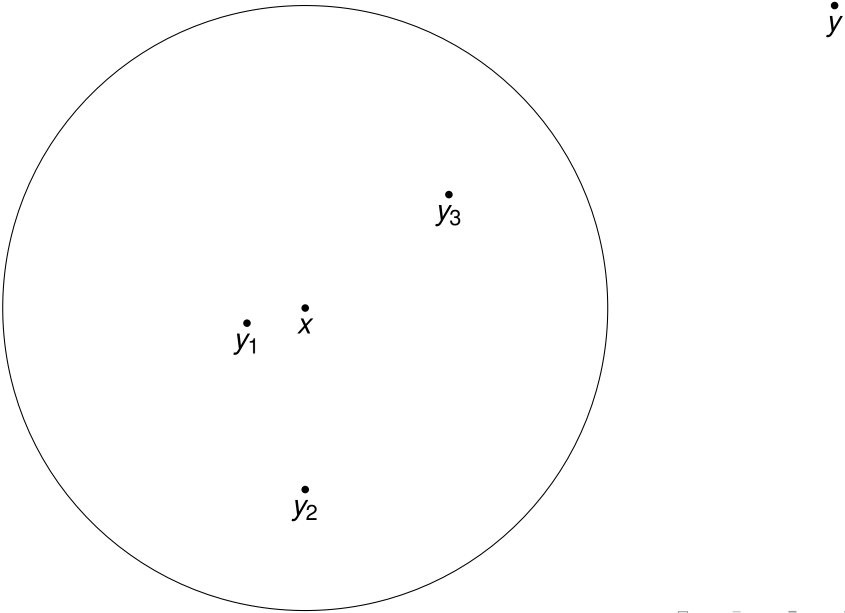
Définition

$lip_0(K)$ sépare uniformément les points de K si

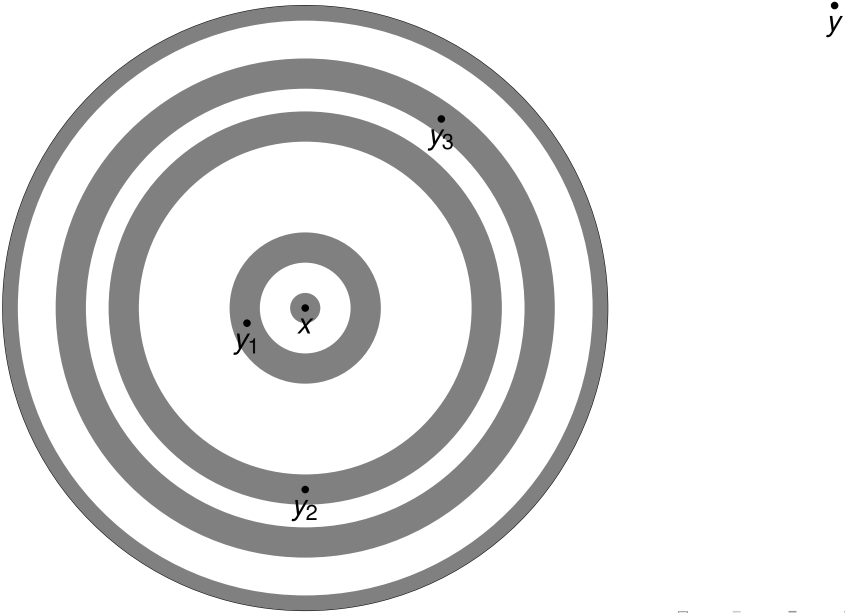
$$\exists c \geqslant 1 : \forall x, y \in K,\ \exists h = h_{x,y} \in lip_0(K), \\ \|h\|_L \leqslant c \text{ et } |h(x) - h(y)| = \mathrm{d}(x, y)$$

Cas particulier : K' fini

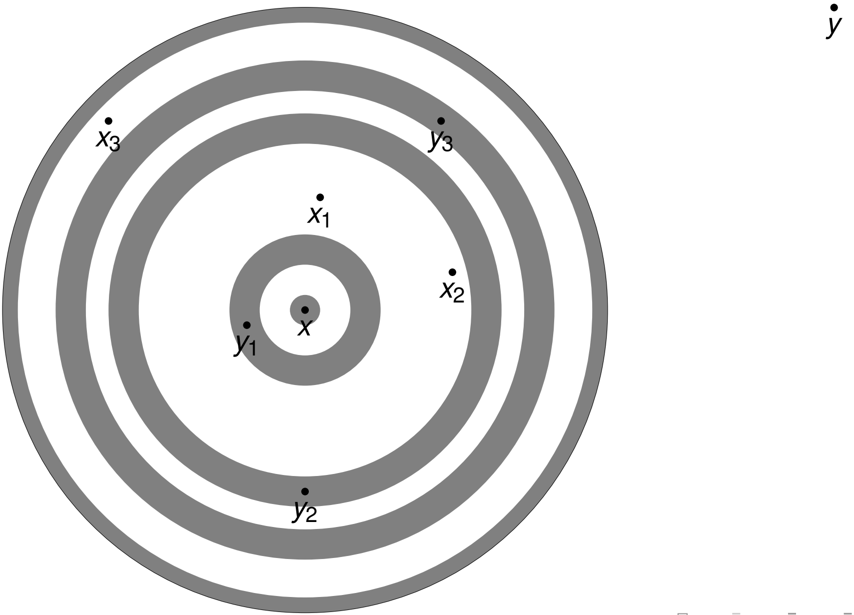
Cas particulier : K' fini



Cas particulier : K' fini

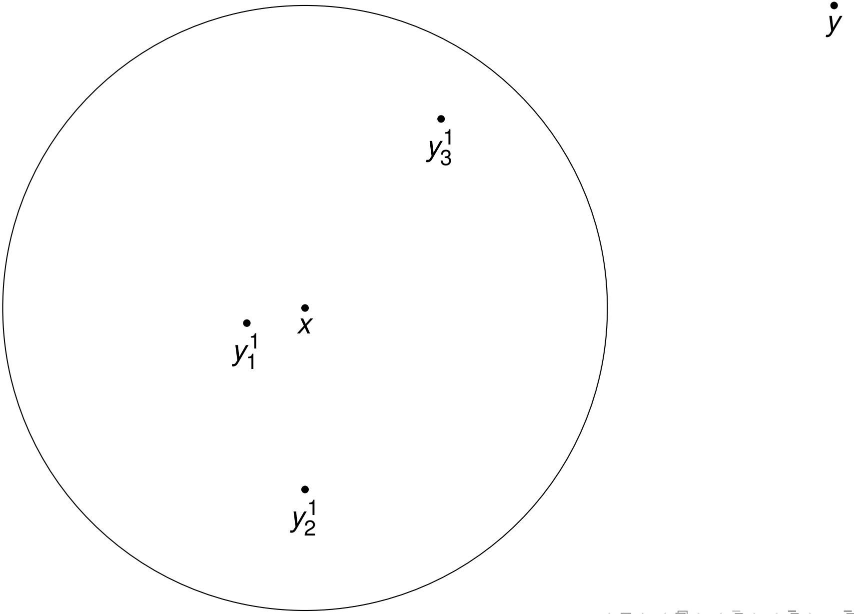


Cas particulier : K' fini

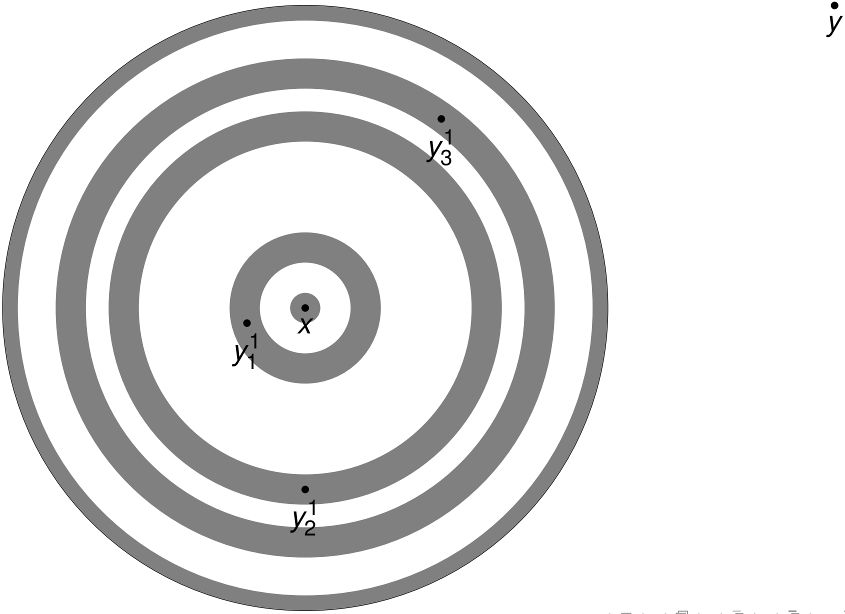


Cas général : $K^{(\alpha)}$ fini

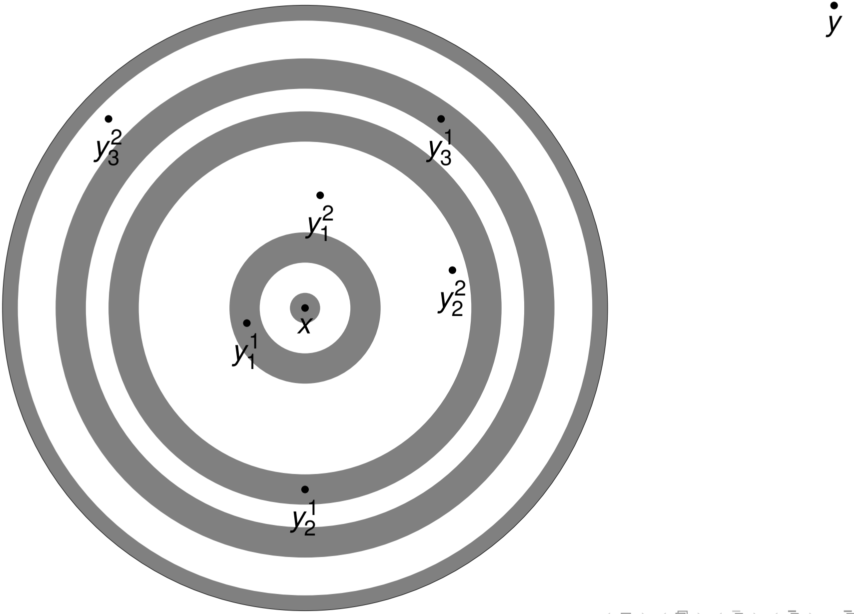
Cas général : $K^{(\alpha)}$ fini



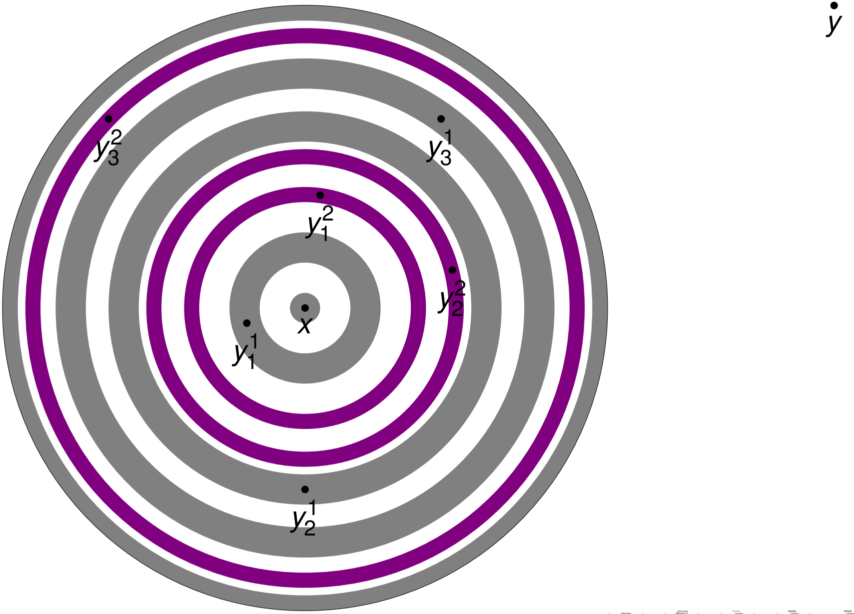
Cas général : $K^{(\alpha)}$ fini



Cas général : $K^{(\alpha)}$ fini



Cas général : $K^{(\alpha)}$ fini



K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, lip$_0(K)$ sépare uniformément les points de K.

Corollaire

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ est un espace dual.

K compact dénombrable $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ dual

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\text{lip}_0(K)$ sépare uniformément les points de K.

Corollaire

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ est un espace dual.

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha : K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha : K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
  - $K^{(\alpha)} = \{0\}$

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha : K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
  - $K^{(\alpha)} = \{0\}$

Décomposition de Kalton

+

$\forall k$ il existe $\beta_k < \alpha$ tel que $A_k^{(\beta_k)}$ fini, donc $\mathcal{F}(A_k)$ a la MAP

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha : K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
  - $K^{(\alpha)} = \{0\}$
  - $K^{(\alpha)} = \{a_1, \ldots, a_N\}$

$$\mathcal{F}(K) = \left(\oplus_{i=1}^{N} \mathcal{F}(F_i)\right)_1 \text{ avec } F_i^{(\alpha)} = \{a_i\} \text{ : chaque } \mathcal{F}(F_i) \text{ a la BAP}$$

$+$

BAP est stable par $\bigoplus_1$ finie et par isomorphisme

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha$, $K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
  - $K^{(\alpha)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la BAP
  - $K^{(\alpha)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la BAP

$\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

- K fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
- $\alpha < \omega_1$ tel que $\forall \beta < \alpha$, $K^{(\beta)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la MAP
  - $K^{(\alpha)} = \{0\} \Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la BAP
  - $K^{(\alpha)}$ fini $\Rightarrow \mathcal{F}(K)$ a la BAP

Or $\mathcal{F}(K)$ est un espace dual dans chacun de ces cas, donc d'après le théorème de Grothendieck, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ est un espace dual.

Théorème

Pour tout K espace métrique compact dénombrable, $\mathcal{F}(K)$ a la MAP.

Sur l'espace Lipschitz-libre des compacts dénombrables

Aude Dalet

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Lundi 21 *octobre* 2013