Sous espaces hyper-invariants de perturbations compactes d'opérateurs normaux

Hubert Klaja
Université de Lille 1

Journées du GdR "Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilités", Lyon
22 Octobre 2013

Soit H un espace de Hilbert complexe et séparable.
On note $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et borné de H.
On note le commutateur de $T \in \mathcal{B}(H)$ par

$$\{T\}' = \{S \in \mathcal{B}(H), ST = TS\}.$$

On note

- $\sigma(T)$ le spectre de T,
- $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel de T,
- $\sigma_e(T)$ le spectre essentiel de T.

Le problème du sous espace invariant

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Est-ce qu'il existe un sous espace fermé $M \subset H$ non trivial (i.e. $M \neq \{0\}$ et $M \neq H$) tel que $T(M) \subset M$?

Le problème du sous espace hyper invariant

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $T \neq \lambda I$. Est-ce qu'il existe un sous espace fermé $M \subset H$ non trivial (i.e. $M \neq \{0\}$ et $M \neq H$) tel que pour tout $S \in \{T\}'$, on a que $S(M) \subset M$?

- Si $T \neq \lambda I$ et $\sigma_p(T) \neq \emptyset$, alors pour tout $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\mathrm{Ker}(T-\lambda)$ est un sous espace hyper invariant non trivial. En effet, soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, soit $x \in \mathrm{Ker}(T-\lambda)$ et soit $S \in \{T\}'$. Alors
$$T(Sx) = S(Tx) = S(\lambda x) = \lambda Sx.$$
Donc $S(\mathrm{Ker}(T-\lambda)) \subset \mathrm{Ker}(T-\lambda)$.
- Si N est un opérateur normal, le théorème spectral garantit l'existence d'un sous espace hyper invariant non trivial pour N.
- Si K est un opérateur compact, le théorème de Lomonosov garantit l'existence d'un sous espace hyper invariant non trivial pour K.
- Si N est un opérateur normal et K est un opérateur compact, en général on ne sait pas si $N+K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Théorème Spectral pour les opérateurs normaux

Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. Alors il existe un espace mesuré (Ω, μ), et une fonction bornée $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, et une isométrie surjective $W : H \to L^2(\Omega, \mu)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "N"] \arrow[d, "W"'] & H \arrow[d, "W"] \\ L^2(\Omega, \mu) \arrow[r, "M_f"'] & L^2(\Omega, \mu) \end{tikzcd}$$

avec $M_f(g) = fg$ pour tout $g \in L^2(\Omega, \mu)$.

Définition

Soient $u, v \in H$. On note $u \otimes v$ l'opérateur de rang 1 tel que pour tout $h \in H$ on a que

$$u \otimes v(h) = \langle h, v \rangle \, u.$$

Définition

Un opérateur $D \in \mathcal{B}(H)$ est *diagonal*, si il existe une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H, et une suite bornée de nombre complexes $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n.$$

Théorème Spectral pour les opérateurs normaux

Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. Alors il existe un espace mesuré (Ω, μ), et une fonction bornée $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, et une isométrie surjective $W : H \to L^2(\Omega, \mu)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "N"] \arrow[d, "W"'] & H \arrow[d, "W"] \\ L^2(\Omega, \mu) \arrow[r, "M_f"'] & L^2(\Omega, \mu) \end{tikzcd}$$

avec $M_f(g) = fg$ pour tout $g \in L^2(\Omega, \mu)$.

- Si D est un opérateur diagonal et $u, v \in H$, en général, on ne sait pas si $D + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.
- En 1984, Stampfli a construit un opérateur diagonal D et deux vecteur $u, v \in H$ tels que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.

Foias, Jung, Ko, Pearcy (2007)

Soit $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal.
Soient $u, v \in H$ tels que $D + u \otimes v \neq \lambda I$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle u, e_n\rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle v, e_n\rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty.$$

Alors $D + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Fang, Xia (2012)

Soit $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal.
Soient $u_1 \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r \in H$,
tels que $D + u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_r \otimes v_r \neq \lambda I$ et

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle u_i, e_n\rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle v_i, e_n\rangle| < \infty.$$

Alors $D + u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_r \otimes v_r$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Décomposition en Valeurs Singulières

Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. Alors il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, et il existe deux familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs orthonormaux dans H tels que

$$K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n.$$

Théorème 1 K. (2013)

Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. On note M_f la multiplication par f sur $L^2(\Omega, \mu)$. Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact sur $L^2(\Omega, \mu)$. Supposons qu'il existe deux point distincts $a, b \in \sigma_e(M_f)$, et une courbe de Jordan Γ tels que

1- La courbe Γ sépare les points a et b et $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,

2- L'application A est bien définie et continue

$$
\begin{aligned}
A : \Gamma &\to \mathcal{K}(H) \\
z &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n\right) \otimes \left((M_f^* - \bar{z})^{-1} v_n\right).
\end{aligned}
$$

Alors $T = M_f + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Corollaire 2 K. (2013)

Soit $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal.
Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n b_n$.
Supposons que $D + K \neq \lambda I$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k\rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n\rangle| < \infty.$$

Alors $T = D + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Théorème 1 K. (2013)

Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. On note M_f la multiplication par f sur $L^2(\Omega, \mu)$. Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact sur $L^2(\Omega, \mu)$. Supposons qu'il existe deux point distincts $a, b \in \sigma_e(M_f)$, et une courbe de Jordan Γ tels que

1- La courbe Γ sépare les points a et b et $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,

2- L'application A est bien définie et continue

$$\begin{aligned} A : \Gamma &\to \mathcal{K}(H) \\ z &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n\right) \otimes \left((M_f^* - \overline{z})^{-1} v_n\right). \end{aligned}$$

Alors $T = M_f + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

$\sigma(N)$

Théorème 1 K. (2013)

Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. On note M_f la multiplication par f sur $L^2(\Omega, \mu)$. Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact sur $L^2(\Omega, \mu)$. Supposons qu'il existe deux point distincts $a, b \in \sigma_e(M_f)$, et une courbe de Jordan Γ tels que

1- La courbe Γ sépare les points a et b et $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,

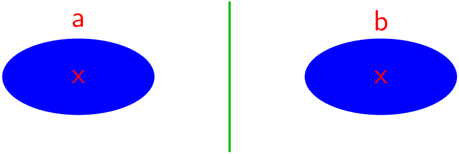
2- L'application A est bien définie et continue

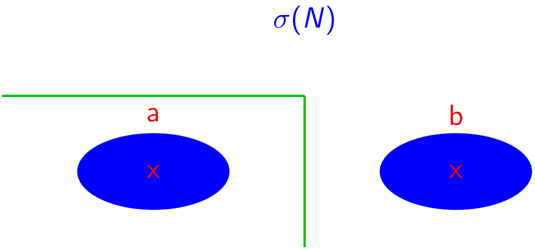
$$A : \Gamma \to \mathcal{K}(H)$$
$$z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n\right) \otimes \left((M_f^* - \overline{z})^{-1} v_n\right).$$

Alors $T = M_f + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

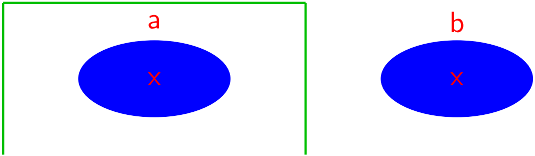
$\sigma(N)$

$\sigma(N)$

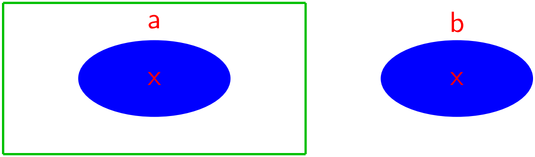



$\sigma(N)$
a
b
x
x

$\sigma(N)$



Γ $\sigma(N)$



Théorème 1 K. (2013)

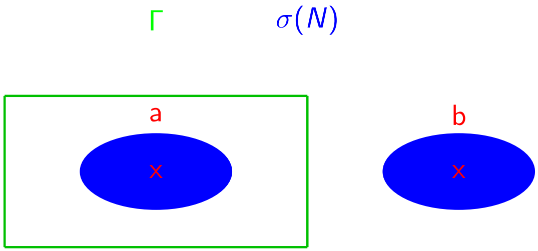
Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. On note M_f la multiplication par f sur $L^2(\Omega, \mu)$. Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact sur $L^2(\Omega, \mu)$. Supposons qu'il existe deux point distincts $a, b \in \sigma_e(M_f)$, et une courbe de Jordan Γ tels que

1- La courbe Γ sépare les points a et b et $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,

2- L'application A est bien définie et continue

$$
\begin{aligned}
A : \Gamma &\to \mathcal{K}(H) \\
z &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n\right) \otimes \left((M_f^* - \overline{z})^{-1} v_n\right).
\end{aligned}
$$

Alors $T = M_f + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.


Γ
$\sigma(N)$
a
x
b
x

Un autre exemple

On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$. On note m la mesure de Lebesgue.
On pose $f(\xi) = \xi$.
Soient $g, h \in L^2(\Omega, m)$. On pose $u(\xi) = (1 - |\xi|)g(\xi)$ et $v(\xi) = (1 - |\xi|)h(\xi)$.
On veut savoir si $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On a que

$$A(z) = \frac{1 - |\xi|}{\xi - z} g \otimes \frac{1 - |\xi|}{\overline{\xi - z}} h$$

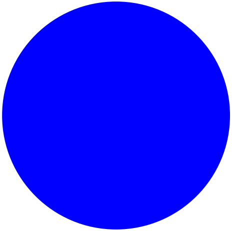
vérifie l'hypothèse 2 sur Γ.

Donc $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Un autre exemple

On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$. On note m la mesure de Lebesgue.
On pose $f(\xi) = \xi$.
Soient $g, h \in L^2(\Omega, m)$. On pose $u(\xi) = (1 - |\xi|)g(\xi)$ et $v(\xi) = (1 - |\xi|)h(\xi)$.
On veut savoir si $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Ω



On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On a que

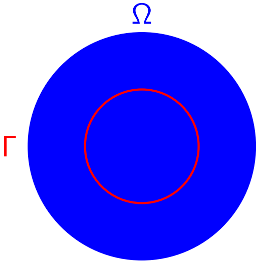
$$A(z) = \frac{1 - |\xi|}{\xi - z} g \otimes \frac{1 - |\xi|}{\overline{\xi - z}} h$$

vérifie l'hypothèse 2 sur Γ.

Donc $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Un autre exemple

On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$. On note m la mesure de Lebesgue.
On pose $f(\xi) = \xi$.
Soient $g, h \in L^2(\Omega, m)$. On pose $u(\xi) = (1 - |\xi|)g(\xi)$ et $v(\xi) = (1 - |\xi|)h(\xi)$.
On veut savoir si $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.



On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On a que

$$A(z) = \frac{1 - |\xi|}{\xi - z} g \otimes \frac{1 - |\xi|}{\overline{\xi - z}} h$$

vérifie l'hypothèse 2 sur Γ.

Donc $M_f + u \otimes v$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Résultats Préliminaires

Fait A

Soit P une projection orthogonale telle que
$\dim\left(P(H)\right) = \dim\left((I - P)(H)\right) = \infty$.
Soit $L \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact.
Alors $P + L$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Fait B

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.
Soit H un espace de Hilbert séparable.
Soit $\mathcal{K}(H)$ l'idéal des opérateurs compact sur H.
Supposons que $F : X \to \mathcal{K}(H)$ est une application faiblement $\mathcal{M}$-mesurable et que

$$\int_X \|F(x)\| \mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

Alors

$$L = \int_X F(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

est un opérateur compact.

Idée de la preuve du Théorème 1

Soit $T = M_f + K$. On suppose que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

- Etape 1. Soit $W = \cap_{z\in\Gamma} \mathrm{Ran}(M_f - z)$. Pour tout $z \in \Gamma$ on pose
$$B(z) = (I + A(z)(M_f - z))^{-1} A(z)$$
$$R(z) = (M_f - z)^{-1} - B(z).$$
On a pour tout $w \in W$ que
$$(T - z)R(z)w = w.$$
- Etape 2. Il existe un opérateur compact L et une projection orthogonale P qui satisfait les hypothèses du Fait A, tel que pour tout $w \in W$
$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma R(z)w\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma (M_f - z)^{-1} w\mathrm{d}z - \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma B(z)w\mathrm{d}z$$
$$= Pw + Lw.$$
- Etape 3. $\{T\}' \subset \{P + L\}'$.

Idée de la preuve du Corollaire 2

Corollaire 2 K. (2013)

Soit $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal.
Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n b_n$.
Supposons que $D + K \neq \lambda I$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k\rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n\rangle| < \infty.$$

Alors $T = D + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.

Lemme 3 K. (2013)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombre réels positifs. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles de vecteurs orthonormaux de H. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Supposons que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k\rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n\rangle| < \infty.$$

alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a que

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k\rangle|^2}{\mathrm{Re}(\lambda_k - x)^2} < \infty$$

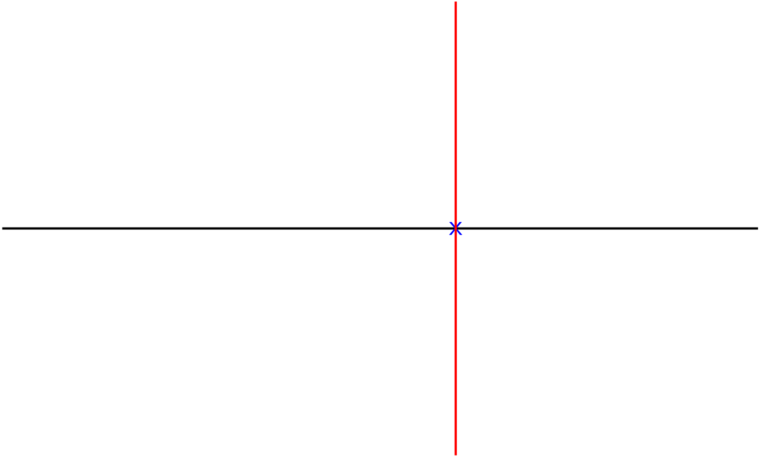
et

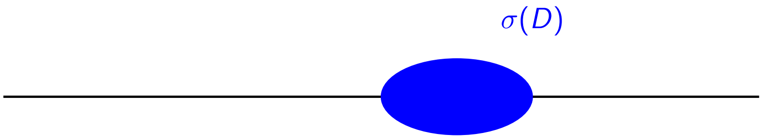
$$h(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|b_n \langle e_j, v_n\rangle|^2}{\mathrm{Re}(\lambda_k - x)^2} < \infty.$$

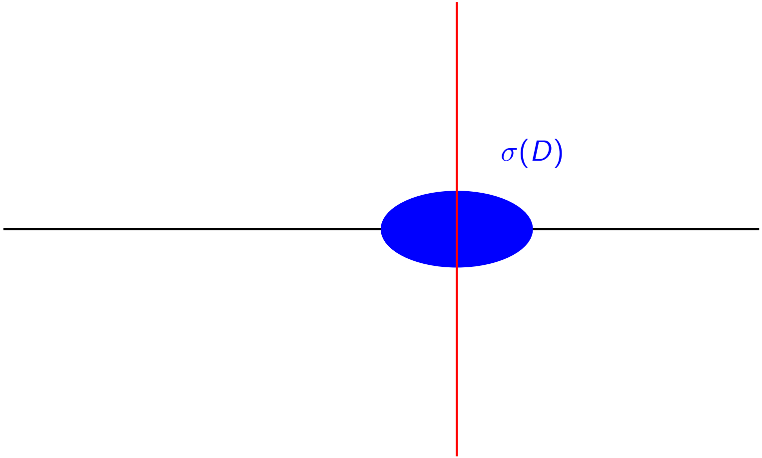
On note $z = x + \mathrm{i}y$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a que $\|A(z)\| \leq g(x)h(x)$.

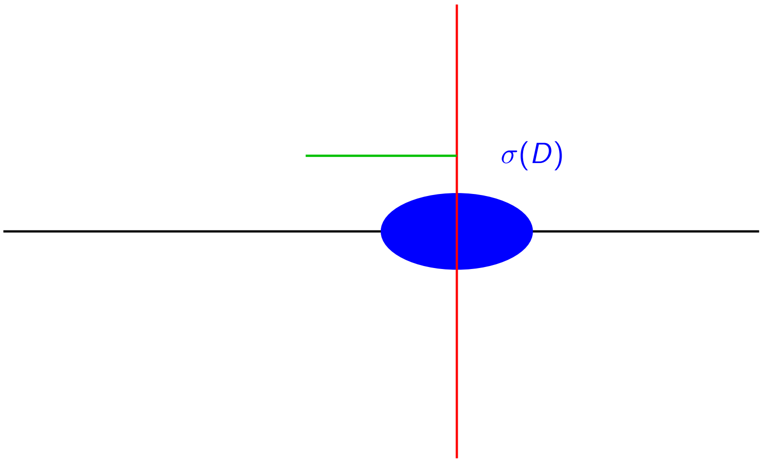
On note $z = x + \mathrm{i}y$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a que $\|A(z)\| \leq g(x)h(x)$.

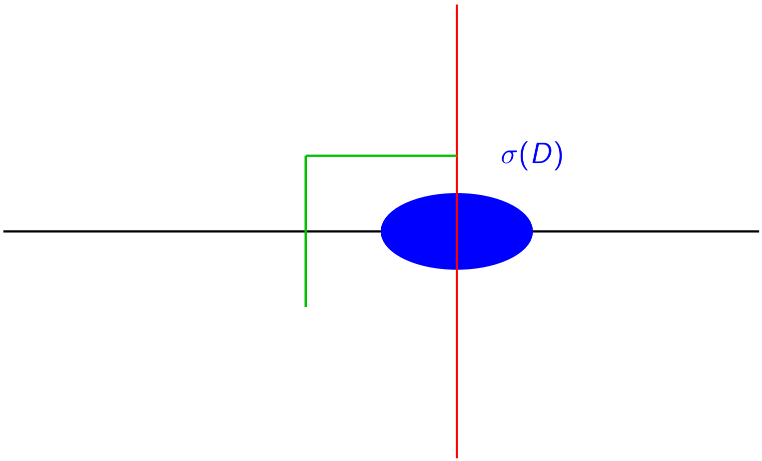
On note $z = x + \mathrm{i}y$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a que $\|A(z)\| \leq g(x)h(x)$.

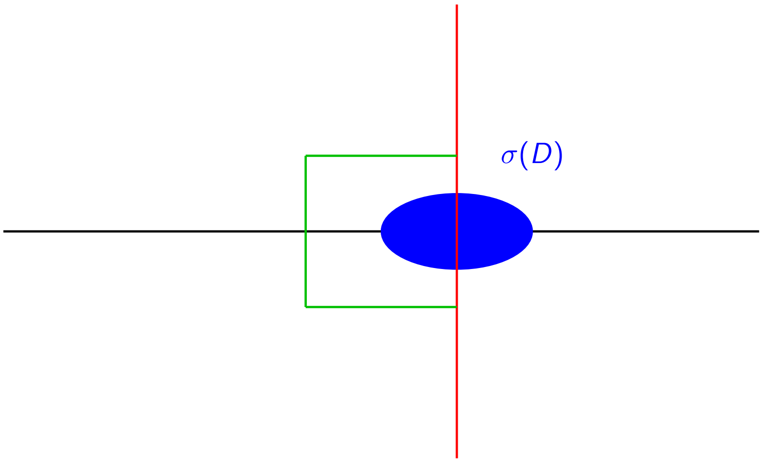


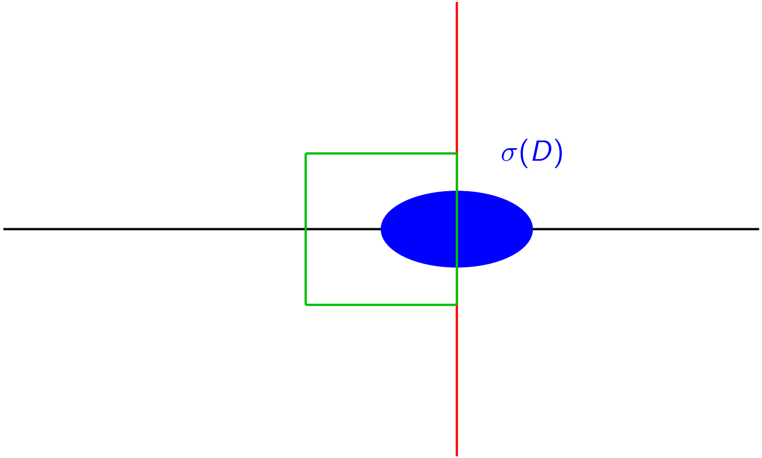

$\sigma(D)$

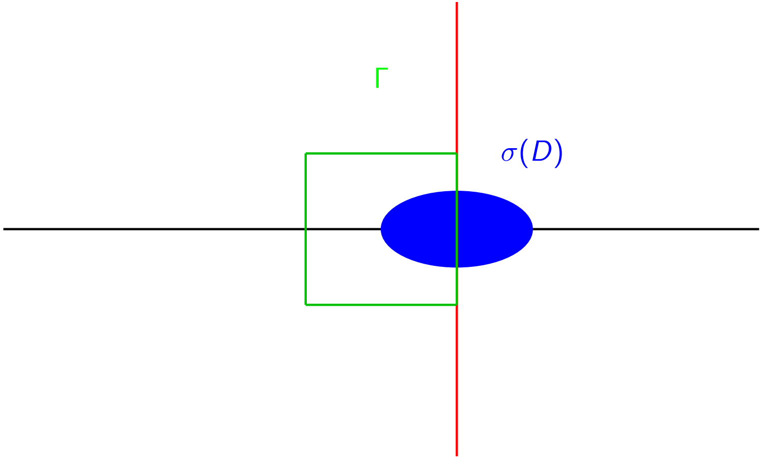

$\sigma(D)$

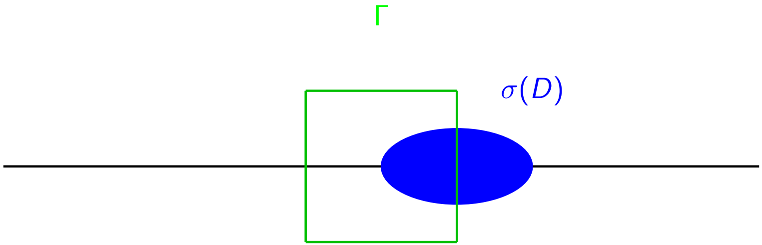

$\sigma(D)$


$\sigma(D)$


$\sigma(D)$


$\sigma(D)$


Γ
$\sigma(D)$


Γ
$\sigma(D)$

Corollaire 2 K. (2013)

Soit $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal.
Soit $K = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ un opérateur compact.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n b_n$.
Supposons que $D + K \neq \lambda I$ and

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k \rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n \rangle| < \infty.$$

Alors $T = D + K$ possède un sous espace hyper invariant non trivial.