Règles de fusions, et applications, pour des produits en couronnes libres par le groupe quantique de permutations

-Journées du GDR AFHP-

François Lemeux

Université de Franche-Comté

francois.lemeux@univ-fcomte.fr

22 Octobre 2013

Sommaire

Sommaire

On considère les C^*-algèbre unifères définies par générateurs et relations :

$$C(S_N) = C^*_{com} - \langle s_{ij} : 1 \leq i, j \leq N : (s_{ij}) \text{ unitaire magique} \rangle,$$

$$C(S_N^+) = C^* - \langle v_{ij} : 1 \leq i, j \leq N : (v_{ij}) \text{ unitaire magique} \rangle.$$

Unitaire magique : (v_{ij}) matrice unitaire et les entrées sont des projections dont les sommes sur les lignes et colonnes valent 1.
On a sur ces C^*-algèbres des coproduits :

$$\Delta : C(S_N) \to C(S_N) \otimes C(S_N) \simeq C(S_N \times S_N),\ \Delta(s_{ij})(\sigma, \tau) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik}\tau_{kj}$$

$$\Delta : C(S_N^+) \to C(S_N^+) \otimes C(S_N^+),\ \Delta(v_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} v_{ik} \otimes v_{kj}$$

$S_N^+ = (C(S_N^+), \Delta)$ est appelé groupe quantique de permutation (Wang).

Woronowicz (80') : définition générale GQC $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$. Sous des hypothèses minimales $\exists h : C(\mathbb{G}) \to \mathbb{C}$ état vérifiant :

$$(h \otimes id) \circ \Delta(\cdot) = h(\cdot)1 = (id \otimes h) \circ \Delta(\cdot)$$

$$(\text{analogue de } \forall g \in G, \int f(gh)d_h = \int f(h)d_h).$$

Théorie de Peter-Weyl : Coreprésentation, $u \in M_N(C(\mathbb{G}))$, $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} u_{ik} \otimes u_{kj}$; entrelaceur, T inversible tq $vT = Tu$.

Théorème (Banica 99)

Les coreprésentation irréductibles de S_N^+ peuvent être indexées par $\mathbb{N}$ avec

- $v^{(0)} = 1$ *est la représentation triviale et* $v = 1 \oplus v^{(1)}$
- $\overline{v^{(k)}} = (v_{ij}^{(k)*})$ *est équivalente à* $v^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, v^{(k)} \otimes v^{(l)} = \bigoplus_{r=0}^{2\min(k,l)} v^{(k+l-r)}$

Définition (Bichon 00)

$H_N^+(\Gamma) := (C(H_N^+(\Gamma)), \Delta)$ où $C(H_N^+(\Gamma))$ est la C^*-algèbre engendrée par des éléments $a_{ij}(g), i, j = 1, \dots, N$ tels que $\forall g, h \in \Gamma$,

$$a_{ij}(g)a_{ik}(h) = \delta_{j,k}a_{ij}(gh), \quad a_{ji}(g)a_{ki}(h) = \delta_{j,k}a_{ji}(gh),$$

$$\sum_i a_{ij}(e) = 1 = \sum_j a_{ij}(e),$$

$$\Delta(a_{ij}(g)) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(g) \otimes a_{kj}(g)$$

Bichon : $H_N^+(\Gamma) \simeq \widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$ où

$$C(\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+) = C^*(\Gamma)^{*N} * C(S_N^+)/\langle g^{(i)}v_{ij} - v_{ij}g^{(i)} = 0\rangle$$

via

$$a_{ij}(g) \mapsto g^{(i)}v_{ij}.$$

Si $\Gamma = \mathbb{Z}_s, s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ on note $H_N^{s+} = H_N^+(\mathbb{Z}_s)$. $C(H_N^{s+})$ est engendrée par les entrées d'une matrice $U = (U_{ij})$ composée d'isométries partielles.

Théorème (Banica, Vergnioux 08)

($\Gamma = \mathbb{Z}_s$, $s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) Les coreprésentations irréductibles de $H_N^{s+} = H_N^+(\mathbb{Z}_s)$ peuvent être indexées par les mots $(i_1, \dots, i_k)$ du monoïde $\langle \mathbb{Z}_s \rangle$ avec l'involution $\overline{(i_1, \dots, i_k)} = (-i_k, \dots, -i_1)$ et les règles de fusions :

$$\begin{aligned}
&(i_1, \dots, i_k) \otimes (j_1, \dots, j_l) \\
&= (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l) \oplus (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k + j_1, j_2, \dots, j_l) \\
&\oplus \delta_{i_k+j_1, 0[s]} (i_1, \dots, j_{k-1}) \otimes (j_2, \dots, j_l)
\end{aligned}$$

De plus, les coreprésentations indexées par les mots de longueur 1, $(k), k \in \mathbb{Z}_s \setminus \{0\}$ correspondent à $U_k := (U_{ij}^k)$ (et $U_{-k} = \overline{U_k}$) et (0) correspond à $(U_{ij} U_{ij}^*) \ominus 1$

Soit $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ GQC tel que l'état de Haar h soit une trace.
$L^\infty(\mathbb{G}) := \overline{C_r(\mathbb{G})}^{\sigma w}$, $C_r(\mathbb{G}) = \pi_h(C(\mathbb{G})) \simeq C(\mathbb{G})/ker(\pi_h)$ est la C^*-algèbre réduite associée à $\mathbb{G}$ ($\pi_h : C(\mathbb{G}) \to B(L^2(\mathbb{G}))$ est la représentation GNS de h).
$(C_r(\mathbb{G}), \Delta_r)$ est encore un GQC, h_r s'étend à $L^\infty(\mathbb{G})$.
Notation : $C(\mathbb{G})_0 = C^* - \langle \sum_i U_{ii} : U \in Irr(\mathbb{G}) \rangle$.

Questions :

- Peut-on déterminer les règles de fusion des produits en couronnes $\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$ si Γ est un groupe discret ? ($H_N^{s+}, s \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ correspondant à $\Gamma = \mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}$)
- Brannan a montré que la C^*-algèbre réduite de S_N^+ possède de nombreuses propriétés intéressantes. Les produits en couronnes ont-ils les mêmes propriétés ?

Sommaire

<u>Idée :</u> La dualité de "Tannaka-Krein de Woronowicz" (88) permet de reconstruire un groupe quantique compact $\mathbb{G}$ à partir de la connaissance des espaces d'entrelaceurs entre $\mathbb{G}$-corepresentations. On a par exemple :

Théorème (Banica 98)

$$Hom_{S_N^+}(v^{\otimes k}; v^{\otimes l}) = span\{T_p : p \in NC(k,l)\}.$$

$T_p : \mathbb{C}^{N^{\otimes k}} \to \mathbb{C}^{N^{\otimes l}}$ application linéaire, associée à une partition non-croisée $p \in NC(k,l)$:

$$\left\{ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \mathscr{P} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix} \right\}$$

$T_p \in B\left(\mathbb{C}^{N^{\otimes k}}, \mathbb{C}^{N^{\otimes l}}\right)$:

$$T_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \sum_{j_1,\ldots,j_l} \delta_p(i,j) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$$

où i (resp. j) est le k-uplet $(i_1, \ldots, i_k)$ (resp. l-uplet $(j_1, \ldots, j_l)$) et $\delta_p(i,j)$ est égal à:

- 1 si les indices correspondants à des points d'un même bloc de p sont tous égaux,
- 0 sinon.

Exemple

(i.) $T_{\{|\}} = id_{\mathbb{C}^N}$

(ii.) $T\_\{\bigcap\}(1) = \sum_a e_a \otimes e_a$

Théorème (Banica, Vergnioux 08)

$$Hom_{H_N^{s+}}(U_{i_1} \otimes \cdots \otimes U_{i_k}; U_{j_1} \otimes \cdots \otimes U_{j_l})$$
$$= span\{T_p : p \in NC_s(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_l)\}$$

où $NC_s(i_1, \ldots, i_k; j_1, \ldots, j_l)$ est l'ensemble des partitions non-croisées telles que si l'on dispose le k-uplet sur les points supérieurs et le l-uplet sur les points inférieurs, alors dans chaque bloc, la somme sur les indices i est égale à la somme sur les indices j modulo s (égalité stricte dans le cas $s = \infty$).

Espaces d'entrelaceurs dans $H_N^+(\Gamma)$:
Stratégie : Trouver un groupe quantique compact $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$,

- dont les espaces d'entrelaceurs sont calculables,
- tel qu'on ait un morphisme surjectif $\pi : C(\mathbb{G}) \to C(H_N^+(\Gamma))$,
- dont le noyau est calculable en terme de partitions non-croisées.

Si $\Gamma = \langle S \rangle$, $|S| = p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathbb{G} = *_{i=1}^{p}(H_N^{\infty+}).$$

C'est un GQC (Wang).
On détermine les espaces d'entrelaceurs du produit libre $\mathbb{G}$, le morphisme $\pi : C(\mathbb{G}) \to C(H_N^+(\Gamma))$, le noyau de π et on conclut.

Théorème (L.)

$$Hom_{H_N^+(\Gamma)}(a(g_1)\otimes\cdots\otimes a(g_k); a(h_1)\otimes\cdots\otimes a(h_k)) \\ = span\{T_p : p\in NC_\Gamma(g_1,\ldots,g_k;h_1,\ldots,h_l)\}$$

$NC_\Gamma(g_1,\ldots,g_k;h_1,\ldots,h_l)$: partitions NC tq dans chaque bloc, $\prod_i g_i = \prod_j h_j$.

Théorème (L.)

Les coreprésentations irréductibles de $H_N^+(\Gamma)$ peuvent être indexées par les $(g_1,\ldots,g_k)\in\langle\Gamma\rangle$ avec $\overline{(g_1,\ldots,g_k)} = (g_k^{-1},\ldots,-g_1^{-1})$ et :

$$(g_1,\ldots,g_k)\otimes(h_1,\ldots,h_l) \\ = (g_1,\ldots,g_{k-1},g_k,h_1,h_2,\ldots,h_l)\oplus(g_1,\ldots,g_{k-1},g_kh_1,h_2,\ldots,h_l) \\ \oplus\,\delta_{g_kh_1,e}(g_1,\ldots,g_{k-1})\otimes(h_2,\ldots,h_l)$$

Sommaire

Irréductibles + règles de fusion de $H_N^+(\Gamma)$: permettent de montrer plusieurs propriétés intéressantes des algèbres d'opérateurs associées.

Théorème (L.)

Les algèbres de von Neumann $L^\infty(H_N^+(\Gamma))$ ont la propriété de Haagerup pour tout $N \geq 4$ et tout groupe Γ fini.

Ingrédients :

- Construction d'opérateurs de convolution $(id \otimes \phi) \circ \Delta,\ \phi \in C(\mathbb{G})_0^* \rightsquigarrow$ applications NUCP sur $L^\infty(\mathbb{G})$ (Brannan),
- La flèche $\pi : C(H_N^+(\Gamma))_0 \to C(S_N^+)_0 \simeq C([0, N])$.
- Construction d'états sur $C(H_N^+(\Gamma))_0$, $ev_x \circ \pi$ et estimations sur les polynômes de Tchebytchev.

Ces algèbres de vN sont des facteurs de type II_1 :

Théorème (L.)

La C^*-algèbre réduite $C_r(H_N^+(\Gamma))$ est simple à trace unique pour tout $N \geq 8$ et tout groupe discret $|\Gamma| \geq 4$.

Ingrédients : adapter les méthodes de Powers pour $C_r^*(F_N)$, espérance conditionnelle $E : C_r(H_N^+(\Gamma)) \to C_r(S_N^+)$; simplicité de $C_r(S_N^+)$ (pour $N \geq 8$, Brannan).

Théorème (L.)

$L^\infty(H_N^+(\Gamma))$ est un facteur plein pour tout $N \geq 8$ et tout groupe discret $|\Gamma| \geq 4$.

Ingrédients : adapter les "14-ϵ" - le facteur du groupe libre $L(F_N)$ n'a pas la propriété Γ; $L^\infty(S_N^+)$ est plein ($N \geq 8$, Brannan).

Quelques questions :

- Γ a HAP $\Rightarrow L^\infty(\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+)$ a HAP ?
- $\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$ est-il faiblement moyennable ?
- Quelles sont les autres propriétés d'algèbres d'opérateurs vérifiées par les produits en couronnes $\widehat{\Gamma} \wr_* S_N^+$ (que $C_r(S_N^+)$ et/ou $C_r(\Gamma)$ vérifient par exemple) ?
- Peut-on déterminer les règles de fusion de $\mathbb{G} \wr_* S_N^+$ avec $\mathbb{G}$ un GQC ?