# Sur l'analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

Arnaud Marsiglietti

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Journées du Gdr AFHP - Université Lyon 1
23 Octobre 2013

# I. Théorie de l'information

# I. Théorie de l'information

Initiée par Ralph Hartley et Claude Shannon :

# I. Théorie de l’information

Initiée par Ralph Hartley et Claude Shannon :

- R. Hartley, *Transmission of information*, 1928

# I. Théorie de l'information

Initiée par Ralph Hartley et Claude Shannon :

- R. Hartley, *Transmission of information*, 1928

- C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, 1948

# I. Théorie de l'information

Initiée par Ralph Hartley et Claude Shannon :
- R. Hartley, *Transmission of information*, 1928
- C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, 1948

Idée : Le but est de comparer différents systèmes de communications. Pour cela, il faut définir une mesure de la quantité d'information.

# I. Théorie de l'information

Initiée par Ralph Hartley et Claude Shannon :

- R. Hartley, *Transmission of information*, 1928

- C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, 1948

Idée : Le but est de comparer différents systèmes de communications. Pour cela, il faut définir une mesure de la quantité d'information.

Shannon définit une notion d'incertitude d'une variable aléatoire.

Shannon définit une notion d'incertitude d'une variable aléatoire.

### Définition (Entropie)

Shannon définit une notion d'incertitude d'une variable aléatoire.

**Définition (Entropie)**

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$H(X) := -\int f \log(f).$$

Shannon définit une notion d'incertitude d'une variable aléatoire.

### Définition (Entropie)

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$H(X) := -\int f \log(f).$$

### Remarque

*A support fixé, l'entropie est maximale pour la loi uniforme.*

Shannon définit une notion d'incertitude d'une variable aléatoire.

## Définition (Entropie)

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$H(X) := -\int f \log(f).$$

## Remarque

*A support fixé, l'entropie est maximale pour la loi uniforme.*

**Définition (Entropie exponentielle)**

**Définition (Entropie exponentielle)**

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$N(X) := \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{2}{n} H(X)}.$$

### Définition (Entropie exponentielle)

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$N(X) := \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{2}{n} H(X)}.$$

### Théorème (Inégalité de l'entropie exponentielle (Shannon (1948), Stam (1959)))

**Définition (Entropie exponentielle)**

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de densité $f$. Alors,*

$$N(X) := \frac{1}{2\pi e} e^{\frac{2}{n} H(X)}.$$

**Théorème (Inégalité de l'entropie exponentielle (Shannon (1948), Stam (1959)))**

*Soient $X$ et $Y$ deux vecteurs aléatoires indépendants. Alors,*

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y).$$

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887

- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896

- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.

## II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}.$$

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

- Dilaté :

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}.$$

- Dilaté :

$$tA=\{ta; a\in A\}.$$

## II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}.$$

- Dilaté :

$$tA=\{ta; a\in A\}.$$

- $B_2^n$ désigne la boule (euclidienne) unité fermée.

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}.$$

- Dilaté :

$$tA=\{ta; a\in A\}.$$

- $B_2^n$ désigne la boule (euclidienne) unité fermée.
- $|.|$ désigne le volume (mesure de Lebesgue).

# II. Théorie de Brunn-Minkowski

Fondations :

- Hermann Brunn, *Über Ovale und Eiflachen*, 1887
- Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, 1896
- Jakob Steiner, *Über parallel Flächen*, 1840

Cadre :

- On travaille dans $\mathbb{R}^n$.
- A,B désignent des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$.
- Somme de Minkowski :

$$A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}.$$

- Dilaté :

$$tA=\{ta; a\in A\}.$$

- $B_2^n$ désigne la boule (euclidienne) unité fermée.
- $|.|$ désigne le volume (mesure de Lebesgue).

**Théorème (Brunn (1887), Minkowski (1896), Lyusternik (1935))**

**Théorème (Brunn (1887), Minkowski (1896), Lyusternik (1935))**

*Soient $A$ et $B$ deux ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

# III. Analogies entre la théorie de l'information et la théorie de Brunn-Minkowski

## III. Analogies entre la théorie de l'information et la théorie de Brunn-Minkowski

Similitude formelle entre une inégalité fondamentale de chaque théorie :

# III. Analogies entre la théorie de l'information et la théorie de Brunn-Minkowski

Similitude formelle entre une inégalité fondamentale de chaque théorie :

**Théorème (Inégalité de l'entropie exponentielle)**

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y).$$

## III. Analogies entre la théorie de l'information et la théorie de Brunn-Minkowski

Similitude formelle entre une inégalité fondamentale de chaque théorie :

**Théorème (Inégalité de l'entropie exponentielle)**

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y).$$

**Théorème (Inégalité de Brunn-Minkowski)**

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

# III. Analogies entre la théorie de l'information et la théorie de Brunn-Minkowski

Similitude formelle entre une inégalité fondamentale de chaque théorie :

**Théorème (Inégalité de l'entropie exponentielle)**

$$N(X+Y) \geq N(X) + N(Y).$$

**Théorème (Inégalité de Brunn-Minkowski)**

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
| --- | --- |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | |
| | |
| | |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
| --- | --- |
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| | |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X + Y$ | |
| | |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
| --- | --- |
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
| --- | --- |
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
| --- | --- |
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | $\log(\lvert A\rvert)$ |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | $\log(\lvert A\rvert)$ |
| indépendance | |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X + Y$ | Somme de Minkowski $A + B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | $\log(\lvert A\rvert)$ |
| indépendance | ? ? |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\|A\|^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | $\log(\|A\|)$ |
| indépendance | (Convexité ?) |

Costa et Cover ont remarqué cette similitude et ont dressé une sorte de dictionnaire entre les deux théories :

| Théorie de l'Information | Théorie de Brunn-Minkowski |
|---|---|
| Vecteur aléatoire $X$ | Compact $A$ |
| Somme de vecteur aléatoire $X+Y$ | Somme de Minkowski $A+B$ |
| gaussienne $Z$ | Boule euclidienne $B_2^n$ |
| $N(X)$ | $\lvert A\rvert^{\frac{1}{n}}$ |
| $H(X)$ | $\log(\lvert A\rvert)$ |
| indépendance | (Convexité ?) |

**Remarque**

*Soit $X$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors, $H(X) = \log(\lvert A\rvert)$.*

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

*On note $Z_t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, t\,Id)$.*

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

*On note $Z_t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, t\,Id)$. Soit $X$ un vecteur aléatoire indépendant de $Z_t$.*

## IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

*On note $Z_t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, t\, Id)$. Soit $X$ un vecteur aléatoire indépendant de $Z_t$. Alors, la fonction $t \mapsto N(X + Z_t)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

*On note $Z_t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, t\, Id)$. Soit $X$ un vecteur aléatoire indépendant de $Z_t$. Alors, la fonction $t \mapsto N(X + Z_t)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Conjecture (Costa-Cover (1984))**

# IV. Un analogue de la concavité de l'entropie exponentielle dans la théorie de Brunn-Minkowski

**Théorème (Concavité de l'entropie exponentielle (Costa (1983))**

*On note $Z_t$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, t\, Id)$. Soit $X$ un vecteur aléatoire indépendant de $Z_t$. Alors, la fonction $t \mapsto N(X + Z_t)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Conjecture (Costa-Cover (1984))**

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Conjecture (Costa-Cover (1984))**

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Remarque (Volume parallèle de $A$)**

## Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x, A) \leq t\}|.$$

## Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x, A) \leq t\}|.$$

## Remarque (Costa-Cover (1984))

### Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x, A) \leq t\}|.$$

### Remarque (Costa-Cover (1984))

*Si $A$ est convexe, alors la conjecture est vraie.*

### Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x,A) \leq t\}|.$$

### Remarque (Costa-Cover (1984))

*Si $A$ est convexe, alors la conjecture est vraie.*
*On utilise le fait que $A = (1-\lambda)A + \lambda A$, puis l'inégalité de Brunn-Minkowski :*

### Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x,A) \leq t\}|.$$

### Remarque (Costa-Cover (1984))

*Si $A$ est convexe, alors la conjecture est vraie.*
*On utilise le fait que $A = (1-\lambda)A + \lambda A$, puis l'inégalité de Brunn-Minkowski :*

$$|A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)B_2^n|^{\frac{1}{n}} \quad =$$

## Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x,A) \leq t\}|.$$

## Remarque (Costa-Cover (1984))

*Si $A$ est convexe, alors la conjecture est vraie.*
*On utilise le fait que $A = (1-\lambda)A + \lambda A$, puis l'inégalité de Brunn-Minkowski :*

$$\begin{aligned} |A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)B_2^n|^{\frac{1}{n}} &= |(1-\lambda)(A + t_1 B_2^n) + \lambda(A + t_2 B_2^n)|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \end{aligned}$$

## Conjecture (Costa-Cover (1984))

*Soit $A$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $t \mapsto |A + B_2^n(0,t)|^{\frac{1}{n}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Remarque (Volume parallèle de $A$)

$$|A + B_2^n(0,t)| = |\{x \in \mathbb{R}^n ; d_{B_2^n}(x, A) \leq t\}|.$$

## Remarque (Costa-Cover (1984))

*Si $A$ est convexe, alors la conjecture est vraie.*
*On utilise le fait que $A = (1-\lambda)A + \lambda A$, puis l'inégalité de Brunn-Minkowski :*

$$\begin{aligned} |A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)B_2^n|^{\frac{1}{n}} &= |(1-\lambda)(A + t_1 B_2^n) + \lambda(A + t_2 B_2^n)|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq (1-\lambda)|A + t_1 B_2^n|^{\frac{1}{n}} + \lambda|A + t_2 B_2^n|^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

### Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

### Exemple (Fradelizi- M.)

### Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

### Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave* $\iff 2ff'' \leq (f')^2$.

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère* $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.

**Calculs :**

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

**Remarque**

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

**Exemple (Fradelizi- M.)**

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| =$$

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$

**Remarque**

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave* $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.

**Exemple (Fradelizi- M.)**

*En dimension 2, on considère* $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$ et $V_A'(0)^2 = 4|B_2^2|^2$.

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\iff 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$ et $V_A'(0)^2 = 4|B_2^2|^2$.

Donc, $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave.

## Remarque

*Une fonction f régulière est $\frac{1}{2}$-concave* $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère* $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$ et $V_A'(0)^2 = 4|B_2^2|^2$.
Donc, $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave.

**Conclusion :**

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$ et $V_A'(0)^2 = 4|B_2^2|^2$.

Donc, $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave.

**Conclusion :** La conjecture est fausse.

## Remarque

*Une fonction $f$ régulière est $\frac{1}{2}$-concave $\Longleftrightarrow 2ff'' \leq (f')^2$.*

## Exemple (Fradelizi- M.)

*En dimension 2, on considère $A = B_2^2 \cup \{(2,0)\}$.*

**Calculs :** Pour $t \in [0, \frac{1}{2})$ ,

$$V_A(t) = |B_2^2 + tB_2^2| + |tB_2^2| = ((1+t)^2 + t^2)|B_2^2|.$$

On a $2V_A(0)V_A''(0) = 8|B_2^2|^2$ et $V_A'(0)^2 = 4|B_2^2|^2$.

Donc, $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave.

**Conclusion :** La conjecture est fausse.

**Théorème (Fradelizi- M.)**

**Théorème (Fradelizi- M.)**

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.*

## Théorème (Fradelizi- M.)

*Soient* $n \geq 1$ *et* $A$ *un ensemble compact de* $\mathbb{R}^n$*. On note* $V_A(t) = |A + tB_2^n|$*, pour* $t \geq 0$*.*

**Théorème (Fradelizi- M.)**

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $V_A(t) = |A + tB_2^n|$, pour $t \geq 0$.*

1. *Pour $n = 1$, la fonction $V_A$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Théorème (Fradelizi- M.)**

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $V_A(t) = |A + tB_2^n|$, pour $t \geq 0$.*

1. *Pour $n = 1$, la fonction $V_A$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Pour $n = 2$, si $A$ est connexe alors $V_A^{\frac{1}{2}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Théorème (Fradelizi- M.)

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $V_A(t) = |A + tB_2^n|$, pour $t \geq 0$.*

1. *Pour $n = 1$, la fonction $V_A$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Pour $n = 2$, si $A$ est connexe alors $V_A^{\frac{1}{2}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, il existe $A$ non connexe tel que $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Théorème (Fradelizi- M.)**

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $V_A(t) = |A + tB_2^n|$, pour $t \geq 0$.*

1. *Pour $n = 1$, la fonction $V_A$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Pour $n = 2$, si $A$ est connexe alors $V_A^{\frac{1}{2}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, il existe $A$ non connexe tel que $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Pour $n \geq 3$, il existe $A$ connexe (et même étoilé), tel que $V_A^{\frac{1}{n}}$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}_+$.*

## Théorème (Fradelizi- M.)

*Soient $n \geq 1$ et $A$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On note $V_A(t) = |A + tB_2^n|$, pour $t \geq 0$.*

1. *Pour $n = 1$, la fonction $V_A$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Pour $n = 2$, si $A$ est connexe alors $V_A^{\frac{1}{2}}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, il existe $A$ non connexe tel que $V_A^{\frac{1}{2}}$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Pour $n \geq 3$, il existe $A$ connexe (et même étoilé), tel que $V_A^{\frac{1}{n}}$ n'est pas concave sur $\mathbb{R}_+$.*

**Démonstration :** [Esquisse]

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape :

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$.

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points.

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points. On veut montrer que

$$2V_A V_A'' \leq (V_A')^2.$$

**Démonstration :** [Esquisse]

<u>1ère étape :</u> On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points. On veut montrer que

$$2 V_A V_A'' \leq (V_A')^2.$$

D'après l'inégalité isopérimétrique, pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$4\pi |A| \leq |\partial A|^2.$$

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \dots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points. On veut montrer que

$$2 V_A V_A'' \leq (V_A')^2.$$

D'après l'inégalité isopérimétrique, pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$4\pi |A| \leq |\partial A|^2.$$

En particulier,

$$4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

**Démonstration :** [Esquisse]
1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \dots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points. On veut montrer que

$$2V_A V_A'' \leq (V_A')^2.$$

D'après l'inégalité isopérimétrique, pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$4\pi|A| \leq |\partial A|^2.$$

En particulier,

$$4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Résultat : [Fialla (1941)]

**Démonstration :** [Esquisse]

1ère étape : On suppose $A$ fini, $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Alors, $V_A$ est $C^\infty$ en dehors d'un nombre fini de points. On veut montrer que

$$2 V_A V_A'' \leq (V_A')^2.$$

D'après l'inégalité isopérimétrique, pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$4\pi |A| \leq |\partial A|^2.$$

En particulier,

$$4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Résultat : [Fialla (1941)]

$$V_A''(t) \leq 2\pi\chi(A + tB_2^2).$$

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$.
Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t)$$

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

<u>2ème étape :</u>

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$.
Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2 V_A(t) V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \dots, x_N\}$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \dots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $A_N + t_0 B_2^2$ est connexe.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $A_N + t_0 B_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $N \geq N_0$, $V_{A_N}$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $A_N + t_0 B_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $N \geq N_0$, $V_{A_N}$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$. Puisque $\lim_{N \to +\infty} V_{A_N} = V_A$,

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

<u>2ème étape :</u> Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \dots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $A_N + t_0 B_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $N \geq N_0$, $V_{A_N}$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$. Puisque $\lim_{N \to +\infty} V_{A_N} = V_A$, on en déduit que $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$

On considère $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $A + t_0 B_2^2$ soit connexe. Alors, pour tout $t \geq t_0$, $A + tB_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $t \geq t_0$, $V_A''(t) \leq 2\pi$. Finalement, pour tout $t \geq t_0$,

$$2V_A(t)V_A''(t) \leq 4\pi V_A(t) \leq V_A'(t)^2.$$

Donc, pour tout $A$ fini, $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$.

2ème étape : Soit $A$ un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère une suite $(x_N)$ de points dense dans $A$. On pose $A_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Soit $t_0 > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$, $A_N + t_0 B_2^2$ est connexe. Donc, pour tout $N \geq N_0$, $V_{A_N}$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$. Puisque $\lim_{N \to +\infty} V_{A_N} = V_A$, on en déduit que $V_A$ est $\frac{1}{2}$-concave sur $[t_0, +\infty)$ et donc sur $\mathbb{R}_+$.

# V. Extensions

# V. Extensions

On souhaite généraliser la conjecture de Costa-Cover (pour ses résultats positifs).

# V. Extensions

On souhaite généraliser la conjecture de Costa-Cover (pour ses résultats positifs).

On peut généraliser la mesure de Lebesgue par des mesures plus générales : les mesures $s$-concaves.

Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))

**Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))**

*Soit $\mu$ une mesure (positive).*

**Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))**

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est $s$-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$,*

**Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))**

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est s-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$, si pour tous compacts $A, B$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mu(A)\mu(B) > 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s)^{\frac{1}{s}}.$$

### Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est s-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$, si pour tous compacts $A, B$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mu(A)\mu(B) > 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s)^{\frac{1}{s}}.$$

*Le cas $s = 0$ correspond aux mesures log-concaves.*

### Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est $s$-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$, si pour tous compacts $A, B$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mu(A)\mu(B) > 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s)^{\frac{1}{s}}.$$

*Le cas $s = 0$ correspond aux mesures log-concaves.*

### Remarque

## Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est s-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$, si pour tous compacts $A, B$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mu(A)\mu(B) > 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s)^{\frac{1}{s}}.$$

*Le cas $s = 0$ correspond aux mesures log-concaves.*

## Remarque

*D'après l'inégalité de Brunn-Minkowski, la mesure de Lebesgue est une mesure $\frac{1}{n}$-concave.*

### Définition (Mesures $s$-concaves (Borell 1974))

*Soit $\mu$ une mesure (positive). On dit que $\mu$ est s-concave, $s \in [-\infty, +\infty]$, si pour tous compacts $A, B$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mu(A)\mu(B) > 0$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda\mu(B)^s)^{\frac{1}{s}}.$$

*Le cas $s = 0$ correspond aux mesures log-concaves.*

### Remarque

*D'après l'inégalité de Brunn-Minkowski, la mesure de Lebesgue est une mesure $\frac{1}{n}$-concave.*

## Question

### Question

*Soit $\mu$ une mesure $s$-concave.*

**Question**

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$.*

## Question

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

**Question**

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

**Théorème (M.)**

### Question

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Théorème (M.)

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$.*

**Question**

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

**Théorème (M.)**

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$. Soient A un compact de $\mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure s-concave.*

### Question

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Théorème (M.)

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$. Soient A un compact de $\mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure s-concave. Alors, la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Question

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Théorème (M.)

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$. Soient A un compact de $\mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure s-concave. Alors, la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $s \in (\frac{1}{2}, 1)$,*

**Question**

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

**Théorème (M.)**

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$. Soient A un compact de $\mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure s-concave. Alors, la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, il existe un compact A et une mesure s-concave $\mu$ tels que $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ n'est pas s-concave sur $\mathbb{R}_+$.*

### Question

*Soit $\mu$ une mesure s-concave. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^n)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Théorème (M.)

*Soit $s \in [-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty]$. Soient A un compact de $\mathbb{R}$ et $\mu$ une mesure s-concave. Alors, la fonction $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ est s-concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, il existe un compact A et une mesure s-concave $\mu$ tels que $t \mapsto \mu(A + tB_2^1)$ n'est pas s-concave sur $\mathbb{R}_+$.*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

**Question**

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

**Question**

*Soit $f$ une fonction positive.*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

**Question**

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave.*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$.*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

## Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Remarque

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Remarque

*Pour $f = 1_A$*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Remarque

*Pour $f = 1_A$ et $g = 1_{B_2^n}$,*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Remarque

*Pour $f = 1_A$ et $g = 1_{B_2^n}$, on a $h_t(z) = 1_{A+tB_2^n}$.*

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

**Question**

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

**Remarque**

*Pour $f = 1_A$ et $g = 1_{B_2^n}$, on a $h_t(z) = 1_{A+tB_2^n}$. Donc,*

$$\int h_t(z)\,\mathrm{d}z = |A + tB_2^n|.$$

On peut également donner une forme fonctionnelle à la conjecture de Costa-Cover.

### Question

*Soit $f$ une fonction positive. Soit $g$ une fonction log-concave. On pose $h_t(z) = \sup_{z=x+ty} f(x)g(y)^t$. La fonction $t \mapsto \int h_t(z)\,\mathrm{d}z$ est-elle log-concave sur $\mathbb{R}_+$ ?*

### Remarque

*Pour $f = 1_A$ et $g = 1_{B_2^n}$, on a $h_t(z) = 1_{A+tB_2^n}$. Donc,*

$$\int h_t(z)\,\mathrm{d}z = |A + tB_2^n|.$$

**Théorème (M.)**

**Théorème (M.)**

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$, $p \geq 1$

**Théorème (M.)**

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$, $p \geq 1$ *et* $g(y) = \mathrm{e}^{-V(y)}$.

## Théorème (M.)

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$*,* $p \geq 1$ *et* $g(y) = \mathrm{e}^{-V(y)}$*. Alors, la fonction* $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h_t(z)\,\mathrm{d}z$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+$*.*

### Théorème (M.)

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$, $p \geq 1$ *et* $g(y) = \mathrm{e}^{-V(y)}$*. Alors, la fonction* $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h_t(z)\,\mathrm{d}z$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+$*.*

### Question ouverte

**Théorème (M.)**

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$, $p \geq 1$ *et* $g(y) = \mathrm{e}^{-V(y)}$. *Alors, la fonction* $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h_t(z)\,\mathrm{d}z$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+$.

**Question ouverte**

*Et pour g log-concave quelconque ?*

### Théorème (M.)

*Soit* $V(y) = \frac{|y|^p}{p}$, $p \geq 1$ *et* $g(y) = \mathrm{e}^{-V(y)}$. *Alors, la fonction* $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} h_t(z)\,\mathrm{d}z$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+$.

### Question ouverte

*Et pour g log-concave quelconque ?*

Merci pour votre attention.

Merci pour votre attention.