Remarques et questions

sur la propriété de Blum-Hanson

Remarques et questions sur la propriété de Blum-Hanson

(P. Lefèvre, A. Primot)

Un résultat ancien très bien connu

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach,

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées $(\|T^n\| \leq C)$.

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). *Soit aussi $x \in X$.*

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). *Soit aussi $x \in X$.*
Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x$$

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). *Soit aussi $x \in X$.*
Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x$$

possèdent une valeur d'adhérence faible,

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). *Soit aussi $x \in X$.*
Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x$$

possèdent une valeur d'adhérence faible, alors elles convergent en norme.

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). Soit aussi $x \in X$.
Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x$$

possèdent une valeur d'adhérence faible, alors elles convergent en norme.

En particulier :

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). Soit aussi $x \in X$. Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n x$$

possèdent une valeur d'adhérence faible, alors elles convergent en norme.

En particulier : Si $T^n x \xrightarrow{w} 0$,

Un résultat ancien très bien connu

(théorème ergodique en moyenne)

Soit X un espace de Banach, et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire à puissances bornées ($\|T^n\| \leq C$). Soit aussi $x \in X$. Si les moyennes de Cesàro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x$$

possèdent une valeur d'adhérence faible, alors elles convergent en norme.

En particulier : Si $T^n x \xrightarrow{w} 0$, alors $\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n x \right\| \to 0.$

Le “théorème de Blum-Hanson”

Le “théorème de Blum-Hanson”

(Jones-Kuftinec 1971)

Le “théorème de Blum-Hanson”

(Jones-Kuftinec 1971)

H Hilbert

Le “théorème de Blum-Hanson”

(Jones-Kuftinec 1971)

H Hilbert

$T \in \mathfrak{L}(H)$ *contraction*

Le "théorème de Blum-Hanson"

(Jones-Kuftinec 1971)

H Hilbert

$T \in \mathfrak{L}(H)$ *contraction*

Si $x \in H$ *et si* $T^n x \xrightarrow{w} 0$,

Le “théorème de Blum-Hanson”

(Jones-Kuftinec 1971)

H Hilbert

$T \in \mathfrak{L}(H)$ *contraction*

Si $x \in H$ et si $T^n x \xrightarrow{w} 0$, alors

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\| \to 0$$

Le “théorème de Blum-Hanson”

(Jones-Kuftinec 1971)

H Hilbert

$T \in \mathfrak{L}(H)$ *contraction*

Si $x \in H$ et si $T^n x \xrightarrow{w} 0$, alors, pour **toute** *suite strictement croissante d'entiers (n_k),*

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\| \to 0$$

Une preuve de Blum-Hanson

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$,

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale)

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P,

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann “ponctuelle” :

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann “ponctuelle” :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2 \leq$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2 \leq \frac{1}{K^2}$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2 \leq \frac{1}{K^2} \sum_{i,j=1}^{K} \widehat{\sigma}_x(n_i - n_j)$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2 \leq \frac{1}{K^2} \sum_{i,j=1}^{K} \widehat{\sigma}_x(n_i - n_j) \xrightarrow{K \to \infty} 0$$

Une preuve de Blum-Hanson

Comme $\|T\| \leq 1$, il existe une mesure $\sigma_x \in M_+(\mathbb{T})$ (mesure spectrale) telle que pour tout $n \geq 0$:

$$\widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x \rangle$$

$$\widehat{\sigma}_x(n) \xrightarrow{|n| \to \infty} 0$$

Pour tout polynôme P, on une inégalité de von Neumann "ponctuelle" :

$$\|P(T)x\|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{K}(t^{n_1} + \cdots + t^{n_K})$$

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\|^2 \leq \frac{1}{K^2} \sum_{i,j=1}^{K} \widehat{\sigma}_x(n_i - n_j) \xrightarrow{K \to \infty} 0$$

Que dire sur un Banach X?

Verbiage

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k).

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).

- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si
$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$
pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).
- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \stackrel{w}{\not\to} 0$,

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si
$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$
pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).
- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \stackrel{w}{\not\to} 0$, *ou bien* $(T^n x)$ est BH.

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).

- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \not\xrightarrow{w} 0$, *ou bien* $(T^n x)$ est BH.
- L'espace X possède la propriété de Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).

- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \overset{w}{\not\to} 0$, *ou bien* $(T^n x)$ est BH.
- L'espace X possède la propriété de Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ si tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de BH en tout point.

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si
$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$
pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).
- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \not\xrightarrow{w} 0$, *ou bien* $(T^n x)$ est BH.
- L'espace X possède la propriété de Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ si tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de BH en tout point.
- Propriété de Blum-Hanson :

Verbiage

- Une suite $(x_n) \subset X$ est une suite de Blum-Hanson si

$$\left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_{n_k} \right\| \to 0$$

pour toute suite strictement croissante d'entiers (n_k). (Dans ce cas, $x_n \xrightarrow{w} 0$).

- $T \in \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en un point x si *ou bien* $T^n x \overset{w}{\not\to} 0$, *ou bien* $(T^n x)$ est BH.
- L'espace X possède la propriété de Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ si tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ satisfait la dichotomie de BH en tout point.
- Propriété de Blum-Hanson : $\mathcal{C} = \{\text{contractions}\}$.

Verbiage : redite

Verbiage : redite

Dire que X a Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$

Verbiage : redite

Dire que X a Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ signifie que tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ vérifie la propriété suivante :

Verbiage : redite

Dire que X a Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ signifie que tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ vérifie la propriété suivante : si $x \in X$ et si $T^n x \xrightarrow{w} 0$,

Verbiage : redite

Dire que X a Blum-Hanson pour une classe d'opérateurs $\mathcal{C}$ signifie que tout opérateur $T \in \mathcal{C} \cap \mathfrak{L}(X)$ vérifie la propriété suivante : si $x \in X$ et si $T^n x \xrightarrow{w} 0$, alors la suite $(T^n x)$ est de Blum-Hanson.

Des choses connues

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions à orbites faiblement convergentes

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975);

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow 1975).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007)

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH

(Müller-Tomilov 2007);

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007);

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007); et c_0 non plus

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007); et c_0 non plus (Augé 2012).

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007); et c_0 non plus (Augé 2012).
- $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ n'a pas BH

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007); et c_0 non plus (Augé 2012).
- $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ n'a pas BH pour les *opérateurs de composition* à orbites faiblement convergentes

Des choses connues

- $L_1 = L_1(0,1)$ a Blum-Hanson pour les contractions à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1972).
- L_p a BH pour les contractions **positives** à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Sucheston 1975); et toute contraction positive sur L_p satisfait la dichotomie de BH en tout $f \in L_p^+$ (Bellow *alias* Ionescu-Tulcea 1975).
- ℓ_1 a trivialement BH (*propriété de Schur*).
- ℓ_p a BH (Müller-Tomilov 2007) et c_0 aussi (Augé 2012).
- ℓ_p n'a pas BH pour les opérateurs **à puissances bornées** à orbites faiblement convergentes (Müller-Tomilov 2007); et c_0 non plus (Augé 2012).
- $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ n'a pas BH pour les *opérateurs de composition* à orbites faiblement convergentes (Akcoglu-Huneke-Rost 1974).

Module de lissité asymptotique

Module de lissité asymptotique

$x \in S_X,$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$\bar{\rho}_X(t, x)$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X, \ t \geq 0$$

$\bar{\rho}_X(t, x) =$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty}$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\text{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\|$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{\rho}_X(t)}{t} = 0$$

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{\rho}_X(t)}{t} = 0$$

Remarque.

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{\rho}_X(t)}{t} = 0$$

Remarque. *Uniformément lisse*

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$\bar{\rho}_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar{\rho}_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar{\rho}_X(t)}{t} = 0$$

Remarque. *Uniformément lisse* $\Longrightarrow$ AUL;

Module de lissité asymptotique

$$x \in S_X,\ t \geq 0$$

$$\bar\rho_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x+ty\| - 1$$

$$\bar\rho_X(t) = \sup_{x \in S_X} \bar\rho_X(t,x)$$

L'espace X est dit asymptotiquement uniformément lisse si

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\bar\rho_X(t)}{t} = 0$$

Remarque. *Uniformément lisse* $\Longrightarrow$ AUL; mais la réciproque est très loin d'être vraie.

Module de lissité asymptotique : exemples

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$,

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$,

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y\in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y\in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t=0$,

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t = 0$, on a

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t=0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) =$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t = 0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) = \Bigg\{$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t = 0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) = \begin{cases} O(t^p) \\ \end{cases}$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t = 0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) = \begin{cases} O(t^p) & \text{si} \quad 1 \leq p < 2 \\ \end{cases}$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y \in B_E} \|x + ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1 + t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t = 0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) = \begin{cases} O(t^p) & \text{si} \quad 1 \leq p < 2 \\ O(t^2) & \end{cases}$$

Module de lissité asymptotique : exemples

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\text{codim(E)}<\infty} \sup_{y\in B_E} \|x+ty\| - 1$$

- Pour tout $x \in S_{\ell_p}$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$\bar{\rho}_{\ell_p}(t,x) = (1+t^p)^{1/p} - 1$$

- Pour tout $x \in S_{c_0}$, on a

$$\bar{\rho}_{c_0}(t,x) = \max(1,t) - 1$$

- Pour $L_p = L_p(0,1)$ et *au voisinage de* $t=0$, on a

$$\bar{\rho}_{L_p}(t) = \begin{cases} O(t^p) & \text{si} \quad 1 \leq p < 2 \\ O(t^2) & \text{si} \quad 2 < p < \infty \end{cases}$$

Un autre “module”

Un autre “module”

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

Un autre "module"

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X$, $t \geq 0$

Un autre “module”

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X,\ t \geq 0$

$r_{\mathbf{C}}(t, x)$

Un autre "module"

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X, \; t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t, x) =$$

Un autre "module"

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X$, $t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t, x) = \quad \sup$$

Un autre “module”

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X$, $t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \quad \sup \quad \limsup_{n\to\infty} \|x + ty_n\|$$

Un autre “module”

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X,\ t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X} \limsup_{n\to\infty} \|x + ty_n\|$$

Un autre "module"

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X, \ t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \|x + ty_n\|$$

Un autre “module”

$\mathbf{C} \subset X$ cône convexe

$x \in X,\ t \geq 0$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \|x + ty_n\|$$

$$r_{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$$

Lien entre les deux modules

Lien entre les deux modules

$$r_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + t y_n\|$$

Lien entre les deux modules

$$r_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y\in B_E} \|x + ty\| - 1$$

Lien entre les deux modules

$$r_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

$$\bar{\rho}_X(t,x) = \inf_{\mathrm{codim(E)}<\infty} \sup_{y\in B_E} \|x + ty\| - 1$$

$$r_X(t,x) \leq \bar{\rho}_X(t,x) + 1$$

Propriétés de r_C

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + t y_n\|$$

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.
- Cette limite est $\geq -\|x\|$

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.
- Cette limite est $\geq -\|x\|$ (sauf si $r_{\mathbf{C}}(t,x) \equiv -\infty$).

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + t y_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.
- Cette limite est $\geq -\|x\|$ (sauf si $r_{\mathbf{C}}(t,x) \equiv -\infty$).
- Elle est ≥ 0

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.
- Cette limite est $\geq -\|x\|$ (sauf si $r_{\mathbf{C}}(t,x) \equiv -\infty$).
- Elle est ≥ 0 si $\mathbf{C}$ est symétrique.

Propriétés de $r_{\mathbf{C}}$

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + t y_n\|$$

- $r_{\mathbf{C}}(t,x)$ est 1-lipschitzien en t.
- Donc $r_{\mathbf{C}}(t,x) - t$ a une limite quand $t \to \infty$.
- Cette limite est $\geq -\|x\|$ (sauf si $r_{\mathbf{C}}(t,x) \equiv -\infty$).
- Elle est ≥ 0 (sauf cas trivial) si $\mathbf{C}$ est symétrique.

Un résultat “positif”

Un résultat “positif”

Théorème.

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe,*

Un résultat "positif"

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone*

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$.

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$*. Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$. *Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *et si on a*

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$*. Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *et si on a*

$$\lim_{t\to\infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x_k) - t)$$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$. *Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *et si on a*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lim_{t\to\infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x_k) - t)$$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$. *Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *et si on a*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lim_{t\to\infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x_k) - t) \leq 0\,,$$

Un résultat “positif”

Théorème. *Soit* $\mathbf{C} \subset X$ *un cône convexe, et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$ *à décalage monotone :* $\|x_{1+n_1} + \cdots + x_{1+n_k}\| \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\|$ *pour tous* $n_1 < \cdots < n_k$*. Si* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *et si on a*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \lim_{t\to\infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x_k) - t) \leq 0\,,$$

alors (x_n) *est une suite de Blum-Hanson.*

Lissité asymptotique extrémale

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \quad :$$

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t \to \infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \;\; : \;\; \lim_{t \to \infty} (r_X(t, x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty}(r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t\to\infty}(\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t\to\infty} (\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

(Mais c'est plus faible :

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t\to\infty} (\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

(Mais c'est plus faible : si $X = \ell_1$,

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t \to \infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t \to \infty} (\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

(Mais c'est plus faible : si $X = \ell_1$, alors $r_X(t,x) \equiv -\infty$

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t\to\infty} (\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

(Mais c'est plus faible : si $X = \ell_1$, alors $r_X(t,x) \equiv -\infty$ mais $\bar{\rho}_X(t,x) \equiv t$ sur S_X).

Lissité asymptotique extrémale

L'espace X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini si

$$\forall x \in X \ : \ \lim_{t\to\infty} (r_X(t,x) - t) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si on a pour tout $x \in S_X$:

$$\lim_{t\to\infty} (\bar{\rho}_X(t,x) + 1 - t) = 0$$

(Mais c'est plus faible : si $X = \ell_1$, alors $r_X(t,x) \equiv -\infty$ mais $\bar{\rho}_X(t,x) \equiv t$ sur S_X).

Lissité asymptotique extrémale $\implies$ Blum-Hanson

Lissité asymptotique extrémale :

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact K infini.

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact K infini.
- $Y \oplus_{\ell_1} Z$,

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact K infini.
- $Y \oplus_{\ell_1} Z$, où Y n'a pas la propriété de Schur

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact K infini.
- $Y \oplus_{\ell_1} Z$, où Y n'a pas la propriété de Schur et $Z \neq \{0\}$.

Lissité asymptotique extrémale : contre-exemples

- $\mathcal{C}(K)$ pour tout compact K infini.
- $Y \oplus_{\ell_1} Z$, où Y n'a pas la propriété de Schur et $Z \neq \{0\}$.
- $L_p(0,1)$ pour tout $p \neq 2$ (!)

Propriétés sous - (m_p)

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p),

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si,

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$,

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \le p \le \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\|$$

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| =$$

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| = (\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p)^{1/p}$$

Propriétés sous-(m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous-(m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| = \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous - (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| \leq \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous - (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| \leq \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Dans ce cas,

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous - (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| \leq \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Dans ce cas, on a pour tout $x \in S_X$ et pour tout $t \geq 0$:

Propriétés sous - (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous - (m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| \leq \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Dans ce cas, on a pour tout $x \in S_X$ et pour tout $t \geq 0$:

$$r_X(t, x) - t \leq (1 + t^p)^{1/p} - t$$

Propriétés sous- (m_p)

(Kalton-Werner)

Un Banach X a la propriété sous-(m_p), $1 \leq p \leq \infty$ si, pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n) \xrightarrow{w} 0$, on a

$$\limsup \|x + x_n\| \leq \left(\|x\|^p + \limsup \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Dans ce cas, on a pour tout $x \in S_X$ et pour tout $t \geq 0$:

$$r_X(t, x) - t \leq (1 + t^p)^{1/p} - t$$

Sous-(m_p) pour un $p > 1 \implies$ lissité asymptotique extrémale

Propriétés sous - (m_p) :

Propriétés sous - (m_p) : exemples

Propriétés sous - (m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur

Propriétés sous - (m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$,

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$

Propriétés sous - (m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous - (m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure

Propriétés sous - (m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous - (m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p).

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p). En particulier,

Propriétés sous - (m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous - (m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p). En particulier, l'espace de Bergman $B_p(\mathbb{D})$ a (m_p).

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p). En particulier, l'espace de Bergman $B_p(\mathbb{D})$ a (m_p).
- Tout *espace d'Orlicz de suites* réflexif

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p). En particulier, l'espace de Bergman $B_p(\mathbb{D})$ a (m_p).
- Tout *espace d'Orlicz de suites* réflexif a sous-(m_p) pour un certain $p > 1$

Propriétés sous-(m_p) : exemples

- Toute somme directe ℓ_p d'espaces X_j ayant la propriété de Schur ou de la forme ℓ_{p_j} pour un $p_j \geq p$, a sous-(m_p).
- Toute somme directe c_0 d'espaces avec Schur a (m_∞).
- Tout $X \subset L_p(\Omega, \mu)$ tel que les suites faiblement convergentes dans X convergent en mesure a (m_p). En particulier, l'espace de Bergman $B_p(\mathbb{D})$ a (m_p).
- Tout *espace d'Orlicz de suites* réflexif a sous-(m_p) pour un certain $p > 1$ (Delpech 2009).

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel.

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$.

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$.

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors,

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

$$\|y + th\| = 1 + t \langle J(y), h \rangle + o(t)$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

$$\|y + th\| = 1 + t \langle J(y), h \rangle + o(t)$$

On dit que la norme de X est

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

$$\|y + th\| = 1 + t \langle J(y), h \rangle + o(t)$$

On dit que la norme de X est uniformément Gâteaux-différentiable

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

$$\|y + th\| = 1 + t \langle J(y), h \rangle + o(t)$$

On dit que la norme de X est uniformément Gâteaux-différentiable si le "o" est uniforme par rapport à $y \in S_X$

Gâteaux-différentiabilité uniforme

Rappel. La norme de X est Gâteaux-différentiable en un point $y \in S_X$ si et seulement si il existe une unique $y^* \in S_{X^*}$ telle que $\langle y^*, y \rangle = 1$. Cette y^* se note $J(y)$. On a alors, pour tout $h \in X \setminus \{0\}$ fixé :

$$\|y + th\| = 1 + t \langle J(y), h \rangle + o(t)$$

On dit que la norme de X est uniformément Gâteaux-différentiable si le "o" est uniforme par rapport à $y \in S_X$ (pour tout h fixé).

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux.*

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si,*

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim\langle J(y_n), x\rangle = 0$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, *alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$*, alors* $\lim_{t \to \infty}(r_{\mathbf{C}}(t, x) - t) = 0$*. Donc,*

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, *alors* $\lim_{t \to \infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, *alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim\langle J(y_n), x\rangle = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$*. Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x*.*

Preuve.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x\rangle = 0$, *alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x.

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, *alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x.

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, *on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, *alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x.

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. *Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x.

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\|x + ty_n\|$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim\langle J(y_n), x\rangle = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$*. Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x*.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\|x + ty_n\| \quad =$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$*, alors* $\lim_{t \to \infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x) - t) = 0$*. Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x*.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\|x + t y_n\| \quad = \quad t \, \|y_n + t^{-1} x\|$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim \langle J(y_n), x\rangle = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$*. Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x*.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= \end{aligned}$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit $x \in \mathbf{C} \subset X$ uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, on a $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, alors $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$.* *Donc, toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$ telle que $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ satisfait la dichotomie de BH au point x.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= t\left[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\right] \end{aligned}$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit $x \in \mathbf{C} \subset X$ uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, on a $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, alors $\lim_{t \to \infty}(r_{\mathbf{C}}(t, x) - t) = 0$. Donc, toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$ telle que $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ satisfait la dichotomie de BH au point x.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= t\left[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\right] \\ &= \end{aligned}$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit $x \in \mathbf{C} \subset X$ uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, on a $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, alors $\lim_{t \to \infty} (r_{\mathbf{C}}(t, x) - t) = 0$. Donc, toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$ telle que $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ satisfait la dichotomie de BH au point x.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= t\Big[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\Big] \\ &= t + \langle J(y_n), x\rangle + o(1)\,, \end{aligned}$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit $x \in \mathbf{C} \subset X$ uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, on a $\lim \langle J(y_n), x \rangle = 0$, alors $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. Donc, toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$ telle que $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ satisfait la dichotomie de BH au point x.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\
&= t\Big[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\Big] \\
&= t + \langle J(y_n), x\rangle + o(1)\,,
\end{aligned}$$

où le “o” ne dépend pas de (y_n).

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit* $x \in \mathbf{C} \subset X$ *uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite* $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$*, on a* $\lim \langle J(y_n), x\rangle = 0$*, alors* $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$*. Donc, toute contraction* $T \in \mathcal{L}(X)$ *telle que* $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ *satisfait la dichotomie de BH au point* x*.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= t\Big[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\Big] \\ &= t + \langle J(y_n), x\rangle + o(1)\,, \end{aligned}$$

où le "o" ne dépend pas de (y_n). Donc

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Remarque triviale. *Soit $x \in \mathbf{C} \subset X$ uniformément Gâteaux. Si, pour toute suite $\mathbf{C} \cap S_X \supset (y_n) \xrightarrow{w} 0$, on a $\lim \langle J(y_n), x\rangle = 0$, alors $\lim_{t\to\infty}(r_{\mathbf{C}}(t,x) - t) = 0$. Donc, toute contraction $T \in \mathcal{L}(X)$ telle que $T(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}$ satisfait la dichotomie de BH au point x.*

Preuve. Si $(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X$ et $y_n \xrightarrow{w} 0$, alors, quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \|x + ty_n\| &= t\,\|y_n + t^{-1}x\| \\ &= t\Big[1 + t^{-1}\langle J(y_n), x\rangle + o(t^{-1})\Big] \\ &= t + \langle J(y_n), x\rangle + o(1)\,, \end{aligned}$$

où le "o" ne dépend pas de (y_n). Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + ty_n\| = t + o(1)$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$*,* $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$ (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$ (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" :

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$*,* $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$ (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$ (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ *satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute* $f \in L_p^+$ (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq \varepsilon + C_\varepsilon \int g\, J(f)$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq \varepsilon + C_\varepsilon \int g\, J(f)$$

Donc,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq \varepsilon + C_\varepsilon \int g\, J(f)$$

Donc, si $g_n \xrightarrow{w} 0$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq \varepsilon + C_\varepsilon \int g\, J(f)$$

Donc, si $g_n \xrightarrow{w} 0$, alors $\langle J(g_n), f \rangle \to 0$.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (suite)

Cas d'école. *Toute contraction positive sur $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ satisfait la dichotomie de Blum-Hanson en toute $f \in L_p^+$* (Bellow).

$$u \in S_{L_p} \cap L_p^+$$

$$J(u) = u^{p-1}$$

"Inégalité de Bellow" : pour tout $\varepsilon > 0$ et $f, g \in S_{L_p} \cap L_p^+$, on a

$$\int J(g)\, f \leq \varepsilon + C_\varepsilon \int g\, J(f)$$

Donc, si $g_n \xrightarrow{w} 0$, alors $\langle J(g_n), f \rangle \to 0$.

Idem sur une large classe d'*espaces d'Orlicz*.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$\mathbf{C} = X$ uniformément Gâteaux

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$\mathbf{C} = X$ uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$\mathbf{C} = X$ uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

C $= X$ uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

C $=X$ uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH $alias$ (*au*):

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (au): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

C $=$ X uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (*au*): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,

$$\lim(\|x + y_n\| - \|x - y_n\|) = 0$$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (au): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,
$$\lim(\|x + y_n\| - \|x - y_n\|) = 0$$
- (?)

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (*au*): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,
$$\lim(\|x + y_n\| - \|x - y_n\|) = 0$$
- (?) *alias* "PRMCAP" :

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (*au*): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,
$$\lim(\|x + y_n\| - \|x - y_n\|) = 0$$
- (?) *alias* "PRMCAP" : pour tout $x \in X$,

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

C $=X$ uniformément Gâteaux

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (*au*): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,

$$\lim(\|x+y_n\| - \|x-y_n\|) = 0$$

- (?) *alias* "PRMCAP" : pour tout $x \in X$, il existe une suite d'opérateurs compacts $(\pi_K) \subset \mathfrak{L}(X)$

Gâteaux-différentiabilité uniforme (fin)

$$\mathbf{C} = X \text{ uniformément Gâteaux}$$

La remarque triviale s'applique en tout point x, et donc X a une lissité asymptotique extrémale à l'infini, si X possède l'une des deux propriétés suivantes.

- WORTH *alias* (*au*): pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(y_n) \xrightarrow{w} 0$,

$$\lim(\|x + y_n\| - \|x - y_n\|) = 0$$

- (?) *alias* "PRMCAP" : pour tout $x \in X$, il existe une suite d'opérateurs compacts $(\pi_K) \subset \mathfrak{L}(X)$ telle que $\pi_K(x) \to x$ et $\|I - \pi_K\| \leq 1$.

“Preuve” du théorème

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

“Preuve” du théorème

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$,

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s)$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) =$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf \quad \sup$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf \quad \sup \quad \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf \sup_{d\leq n_1<\cdots<n_s} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf \sup_{\substack{d \le n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \ge d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

“Preuve” du théorème

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}$$

Pour $s \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

$$F(s) = \inf_{d \geq 1} \sup_{\substack{d \leq n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1.

$$F(s) = \inf_{d \geq 1} \sup_{\substack{d \leq n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson

$$F(s) = \inf_{d \geq 1} \sup_{\substack{d \leq n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x+ty_n\|$$

$$F(s) = \inf_{d \geq 1} \sup_{\substack{d \leq n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s \to \infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t, x) = \sup_{\substack{(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

Fait 2.

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x+ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1) \leq r_{\mathbf{C}}(F(s), x_k)$

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1) \leq r_{\mathbf{C}}(F(s), x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s\\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X\\ y_n\xrightarrow{w}0}} \limsup \|x+ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1) \leq r_{\mathbf{C}}(F(s), x_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ si (x_n) est à décalage monotone.

$$F(s) = \inf_{d \geq 1} \sup_{\substack{d \leq n_1 < \cdots < n_s \\ n_{i+1} - n_i \geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s \to \infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t, x) = \sup_{\substack{(y_n) \subset \mathbf{C} \cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + t y_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1) \leq r_{\mathbf{C}}(F(s), x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si (x_n) est à décalage monotone.

Fait 2

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s \\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x + ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1) \leq r_{\mathbf{C}}(F(s), x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ si (x_n) est à décalage monotone.

$$\text{Fait 2} \implies$$

$$F(s)=\inf_{d\geq 1}\sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s\\ n_{i+1}-n_i\geq d}}\|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s=0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x)=\sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X\\ y_n\xrightarrow{w}0}}\limsup\|x+ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1)\leq r_{\mathbf{C}}(F(s),x_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ si (x_n) est à décalage monotone.

$$\text{Fait 2}\implies \limsup_{s\to\infty}(F(s+1)-F(s))\leq 0$$

$$F(s) = \inf_{d\geq 1} \sup_{\substack{d\leq n_1<\cdots<n_s\\ n_{i+1}-n_i\geq d}} \|x_{n_1}+\cdots+x_{n_s}\|$$

Fait 1. La suite (x_n) est Blum-Hanson ssi $\lim_{s\to\infty} F(s)/s = 0$.

$$r_{\mathbf{C}}(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset \mathbf{C}\cap S_X\\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup \|x+ty_n\|$$

Fait 2. On a $F(s+1)\leq r_{\mathbf{C}}(F(s),x_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ si (x_n) est à décalage monotone.

$$\text{Fait 2} \implies \limsup_{s\to\infty}(F(s+1)-F(s))\leq 0$$

$$\text{Fait 1} \Longrightarrow \text{ OK}$$

Un module “symétrique”

Un module "symétrique"

$\widetilde{r}_X(t,x)$

Un module "symétrique"

$\widetilde{r}_X(t, x) =$

Un module “symétrique”

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}}$$

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty}$$

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

$$\widetilde{r}_X(t,x) \leq r_X(t,x)$$

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

$$\widetilde{r}_X(t,x) \leq r_X(t,x)$$

Fait agaçant.

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

$$\widetilde{r}_X(t,x) \leq r_X(t,x)$$

Fait agaçant. Si X est uniformément Gâteaux,

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

$$\widetilde{r}_X(t,x) \le r_X(t,x)$$

Fait agaçant. Si X est uniformément Gâteaux, alors

Un module "symétrique"

$$\widetilde{r}_X(t,x) = \sup_{\substack{(y_n)\subset S_X \\ y_n \xrightarrow{w} 0}} \limsup_{n\to\infty} \frac{\|x+ty_n\| + \|x-ty_n\|}{2}$$

$$\widetilde{r}_X(t,x) \leq r_X(t,x)$$

Fait agaçant. Si X est uniformément Gâteaux, alors

$$\lim_{t\to\infty} (\widetilde{r}_X(t,x) - t) = 0$$

Questions

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert,

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?
- Si X a Schur,

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?
- Si X a Schur, $L_2(\Omega, \mathbb{P}, X)$ a-t-il Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?
- Si X a Schur, $L_2(\Omega, \mathbb{P}, X)$ a-t-il Blum-Hanson?
- Quels Banach peuvent-être renormés

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?
- Si X a Schur, $L_2(\Omega, \mathbb{P}, X)$ a-t-il Blum-Hanson?
- Quels Banach peuvent-être renormés de façon à avoir Blum-Hanson?

Questions

- $L_p(0,1)$ a-t-il Blum-Hanson si $p \neq 2$?
- Est-ce que tout Banach uniformément lisse a Blum-Hanson?
- L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ a-t-il Blum-Hanson?
- Est-ce que tout sous-espace de L_1 a Blum-Hanson?
- Quels $\mathcal{C}(K)$ ont Blum-Hanson? (On le sait pour K métrisable).
- ℓ_∞ a-t-il Blum-Hanson?
- Si H est un Hilbert, $H \oplus_{\ell_1} H$ a-t-il Blum-Hanson?
- Si X a Schur, $L_2(\Omega, \mathbb{P}, X)$ a-t-il Blum-Hanson?
- Quels Banach peuvent-être renormés de façon à avoir ou ne pas avoir Blum-Hanson?

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition.

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation,*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1+10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$* (ou si on préfère,

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1+10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$* (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$),

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si* $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$), *alors $\mathcal{C}(K)$ n'a pas BH*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si* $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$), *alors $\mathcal{C}(K)$ n'a pas BH pour les opérateurs de composition à orbites faiblement convergentes.*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$), alors $\mathcal{C}(K)$ n'a pas BH pour les opérateurs de composition à orbites faiblement convergentes.*

Corollaire.

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$* (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$), *alors $\mathcal{C}(K)$ n'a pas BH pour les opérateurs de composition à orbites faiblement convergentes.*

Corollaire. *Quand K est métrisable,*

Appendice : cas des espaces $\mathcal{C}(K)$

Proposition. *Soit K un espace topologique compact.*

(1) *Si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation, alors $\mathcal{C}(K)$ a Blum-Hanson.*

(2) *Si $K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{p}(1 + 10^{-q});\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$* (ou si on préfère, $K = \omega \cdot \omega + 1$)*, alors $\mathcal{C}(K)$ n'a pas BH pour les opérateurs de composition à orbites faiblement convergentes.*

Corollaire. *Quand K est métrisable, $\mathcal{C}(K)$ a BH si et seulement si K n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation.*